Eidgenössische
Technische Hochschule
Zürich

Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo
Federal Institute of Technology at Zurich

Institut für Theoretische Informatik
Peter Widmayer
Thomas Tschager

2. März 2016

Datenstrukturen & Algorithmen — Lösungen zu Blatt 1 — FS 16

Lösung 1.1 *Die Menge $\Theta(g)$.*

Wir betrachten die Funktionen $f(n) = n$ und $g(n) = n + \sqrt{n}$. Dann gelten zwar $f \in \mathcal{O}(g)$ und $f \in \Omega(g)$, aber es gibt keine Konstante c, sodass $f(n) = c \cdot g(n)\ \forall n \geq n_0$.

Gemäss der Definitionen von $\mathcal{O}(g), \Omega(g)$ und $\Theta(g)$ gilt für $\Theta(g)$:

$$
\begin{aligned}
\Theta(g) &= \mathcal{O}(g) \cap \Omega(g) \\
&= \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, n_1, n_2 \in \mathbb{N} : \\
&\qquad (\forall n \geq n_1 : c_1 g(n) \leq f(n)) \wedge (\forall n \geq n_2 : f(n) \leq c_2 g(n))\} && (1) \\
&= \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\} && (2) \\
&= \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid \exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : c^{-1} g(n) \leq f(n) \leq c g(n)\}. && (3)
\end{aligned}
$$

Die Ausdrücke (1) und (2) sind äquivalent: Falls n_1, n_2 in (1) existieren, dann auch ein passendes n_0, beispielsweise $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Falls n_0 in (2) existiert, so auch passende n_1, n_2, beispielsweise $n_1 = n_2 = n_0$.

Die Ausdrücke (2) und (3) sind ebenfalls äquivalent: Falls c_1, c_2 in (2) existieren, so auch ein passendes c, beispielsweise $c = \max(1/c_1, c_2)$ (dann sind sowohl $1/c \leq c_1$ als auch $c \geq c_2$). Falls c in (3) existiert, so auch passende c_1, c_2, beispielsweise $c_1 = c^{-1}$, $c_2 = c$.

Hinweis: Die folgende Definition ist noch etwas kompakter, aber weniger nützlich für Beweise:

$$\Theta(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ : c^{-1} g \leq f \leq c g\}. \quad (4)$$

Hier wird die Konstante c so gross gewählt, dass die Ungleichungen für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten (wir verwenden $0 \notin \mathbb{R}^+$).

Lösung 1.2 *Beweise über $\mathcal{O}$-Notation.*

a) Die Aussage ist wahr. Sie folgt direkt aus den Definitionen von $\mathcal{O}(g)$ bzw. $\Omega(f)$, denn es gilt

$$
\begin{aligned}
f \in \mathcal{O}(g) &\Leftrightarrow \exists c_1 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c_1 g(n) \\
&\Leftrightarrow \exists c_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : g(n) \geq c_2 f(n) \Leftrightarrow g \in \Omega(f). && (5)
\end{aligned}
$$

Als Konstante in der zweiten Zeile kann z.B. $c_2 = c_1^{-1}$ gewählt werden.

b) Die Aussage ist falsch. Wählen wir beispielsweise $f(n) = 2n$ und $g(n) = n^2$, dann ist $f \in \mathcal{O}(g)$, jedoch $f(1) > g(1)$.

c) Die Aussage ist wahr. Sei $f(n) \leq g(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $c = 1$ und $n_0 = 1$ gilt dann $f(n) \leq cg(n)$ für alle $n \geq n_0$. Damit ist $f \in \mathcal{O}(g)$.

d) Die Aussage ist wahr. Man betrachte etwa die Funktionen $f(n) = n$ und $g(n) = 2n$ und setze $n_0 = 1$. Dann ist $f(n) \geq \frac{1}{2}g(n)$ für alle $n \geq n_0$ und damit $f \in \Omega(g)$. Andererseits ist $g(n) \geq f(n)$ für alle $n \geq n_0$ und damit auch $g \in \Omega(f)$.

e) Die Aussage ist wahr. Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ ist $\log_a(n) = \frac{\log_b(n)}{\log_b(a)}$, also setzen wir $n_0 = 1$ und $c = (\log_b(a))^{-1}$. Dann sind für alle $n \geq n_0$

$$\log_a(n) \leq c \log_b(n) \text{ und } \log_a(n) \geq c \log_b(n), \tag{6}$$

also sind $\log_a(n) \in \mathcal{O}(\log_b(n))$ und $\log_a(n) \in \Omega(\log_b(n))$ und damit $\log_a(n) \in \Theta(\log_b(n))$.

f) Die Aussage ist wahr. Nach Definition sind

$$f_1 \in \mathcal{O}(g) \Leftrightarrow \exists c_1 \in \mathbb{R}^+, n_1 : \forall n \geq n_1 : f_1(n) \leq c_1 g(n), \tag{7}$$
$$f_2 \in \mathcal{O}(g) \Leftrightarrow \exists c_2 \in \mathbb{R}^+, n_2 : \forall n \geq n_2 : f_2(n) \leq c_2 g(n). \tag{8}$$

Mit $c := c_1 + c_2$ und $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ gilt für alle $n \geq n_0$

$$f(n) = f_1(n) + f_2(n) \leq c_1 g(n) + c_2 g(n) = cg(n), \tag{9}$$

folglich ist $f \in \mathcal{O}(g)$.

g) Die Aussage ist falsch. Man wähle z.B. $f_1(n) = f_2(n) = n$ und $g(n) = n$. Dann sind $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(g)$, aber $f(n) = f_1(n) \cdot f_2(n) = n^2 \notin \mathcal{O}(n)$ (es gibt keine Konstanten $c > 0$ und n_0, sodass $n^2 \leq cn$ für alle $n \geq n_0$ gilt).

h) Die Aussage ist falsch. Wir wählen beispielsweise $a = 2$, $b = 3$ und nehmen an, es gelte $n^{1/a} \in \Theta(n^{1/b})$. Dann ist auch $n^{1/2} \in \mathcal{O}(n^{1/3})$. Das heisst, es existieren $c > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $n^{1/2} \leq c \cdot n^{1/3}$, bzw. $c \geq n^{1/2-1/3} = n^{1/6}$. Das ist ein Widerspruch, da c konstant ist, n aber beliebig gross werden kann.

Hinweis: Die Aussage gilt für keine $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \neq b$.

Lösung 1.3 *Asymptotisches Wachstum von Funktionen.*

Wir beobachten

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{(n-3)!3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \in \Theta(n^3) \tag{10}$$

und $\sqrt{n} = n^{0.5}$. Ausserdem gilt $\log(n^4) = 4 \cdot \log(n)$. Die einzige (!) korrekte Reihenfolge lautet damit

$$2^{16},\ \log(n^4),\ \log^8(n),\ \sqrt{n},\ \binom{n}{3},\ n^5 + n,\ \frac{2^n}{n^2},\ n!,\ n^n.$$