Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger

1. Februar 2008

Algorithmen und Komplexität (D-MATH)
Klausur Frühling 2008

Kandidat/in:

Name: ....

Vorname: ....

Stud.-Nr.: ....

Ich bezeuge mit meiner Unterschrift, dass ich die Prüfung unter regulären Bedingungen ablegen konnte und dass ich die unten stehenden allgemeinen Bemerkungen gelesen und verstanden habe.

Unterschrift: ....

Allgemeine Bemerkungen und Hinweise:

- Diese Prüfung besteht neben diesem doppelseitigen Deckblatt aus einem beidseitig bedruckten Aufgabenblatt mit insgesamt fünf Aufgaben.
- Als einziges Hilfsmittel sind 10 beidseitig handschriftlich beschriebene A4-Blätter erlaubt.
- Falls Sie während der Prüfung in irgendeiner Weise gestört oder beeinträchtigt werden, melden Sie dies sofort der Aufsichtsperson. Spätere Klagen werden nicht akzeptiert.
- **Schreiben Sie nicht mit Bleistift! Abgaben, die mit Bleistift geschrieben sind, werden nicht bewertet.**
- Alle Mobiltelefone müssen vollständig ausgeschaltet sein.
- **Alle Antworten müssen für den Korrektor verständlich begründet werden. Schreiben Sie die wesentlichen Lösungsgedanken in klaren Sätzen oder Stichworten hin. Unverständliche oder nicht begründete Antworten werden nicht bewertet.**
- Pro Aufgabe ist höchstens eine gültige Version eines Lösungsversuchs zulässig. Streichen Sie ungültige Lösungsversuche klar durch.
- Sie dürfen alle Aufgaben in beliebiger Reihenfolge lösen. Konzentrieren Sie sich jeweils auf eine Aufgabe, aber teilen Sie sich Ihre Zeit ein.
- Abschreiben und sonstige Versuche des Betrugs führen zum sofortigem Ausschluss von der Prüfung und können rechtliche Folgen haben.
- Die Prüfung dauert zwei Stunden. Falls Sie vorzeitig fertig werden sollten, melden Sie sich durch Handaufhalten bei einer der Aufsichtspersonen und verlassen Sie still den Raum. **In den letzten 20 Minuten der Prüfung kann der Raum nicht mehr verlassen werden.**
- **Vergessen Sie nicht, dieses Deckblatt zu unterschreiben, und beschriften Sie jedes abgegebene Blatt mit Ihrem Namen. Das Aufgabenblatt ist mit abzugeben.**

Viel Erfolg!

	Erreichte Punktzahl (maximal)	Visum
1	(30)	
2	(25)	
3	(25)	
4	(20)	
5	(20)	
Σ	(120)	

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen trifft zu? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) QuickSort hat eine Worst-Case Laufzeit von $\mathcal{O}(n \log n)$.

(b) Einen Graphen als Adjazenzliste zu speichern hat den Nachteil eines hohen Speicheraufwandes.

(c) Der Algorithmus von Prim funktioniert auch auf Graphen mit positiven und negativen Kantengewichten.

(d) Der MST-Algorithmus von Kruskal ist effizienter als der MST-Algorithmus von Prim.

(e) Für ein Entscheidungsproblem A gilt: $A \in \mathcal{P} \Rightarrow A \in \mathcal{NP}$.

(f) Man kann in polynomieller Zeit entscheiden, ob ein gegebener Graph $G = (V, E)$ mit 3 Farben färbbar ist, aber nicht, ob G mit 4 Farben färbbar ist.

(g) $\log^3(n^2) = \omega(\log n^3)$.

(h) Aus $f(n) = \mathcal{O}(n^2)$ und $g(n) = \Theta(10^5 n)$ folgt $f(n) + g(n) = \mathcal{O}(n^2)$.

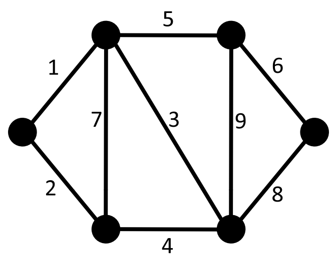
(i) Aus $f(n) = \mathcal{O}(n^2)$ und $g(n) = \mathcal{O}(10^5 n)$ folgt $f(n) + g(n) = \Theta(n^2)$.

(j) $n^2 + 2n = \frac{1}{2}n^2 + o(n^2)$.

(10·3=30 Punkte)

Aufgabe 2

(a) Bestimmen Sie einen minimalen Spannbaum des untenstehenden Graphen. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.



(b) Zeigen Sie, dass ein Graph, dessen Kantengewichte paarweise verschieden sind, einen eindeutigen minimalen Spannbaum besitzt.

(c) Sei $G = (V, E)$ ein Graph, dessen Kantengewichte paarweise verschieden sind. Geben Sie einen Algorithmus an, mit dem man in Zeit $\mathcal{O}\big(|V| \cdot (|E| + |V| \cdot \log |V|)\big)$ einen Spannbaum von G bestimmen kann, der das zweitkleinste Gewicht aller Spannbäume besitzt.

(6+9+10=25 Punkte)

Aufgabe 3

Ein Palindrom ist eine Zeichenkette, die von vorne und von hinten gelesen gleich ist (z.Bsp. "ANNA", "RENTNER" oder "LAGERREGAL"). In dieser Aufgabe geht es darum, aus einer gegebenen Zeichenkette mit möglichst wenigen Operationen ein Palindrom zu machen.

Gegeben ist eine Zeichenkette s der Länge n. Es stehen zwei Operationen zur Verfügung:

DELETE(s, i): Entfernt das i-te Zeichen aus der Zeichenkette s
REPLACE(s, i, x): Ersetzt in der Zeichenkette s das Zeichen an der Stelle i durch x

Beschreiben Sie einen Algorithmus, welcher in Zeit $\mathcal{O}(n^2)$ die minimale Anzahl Operationen (DELETE und REPLACE) bestimmt, die nötig sind, um aus s ein Palindrom (beliebiger Länge) zu machen.
Tipp: Nehmen Sie an, dass $k(s)$ die Anzahl Operationen beschreibt, die nötig sind, um aus s ein Palindrom zu machen. Überlegen Sie, wie man $k(s)$ rekursiv berechnen kann.

(25 Punkte)

Aufgabe 4

(a) Wir möchten einen Fibonacci-Heap um eine Operation GETMIN erweitern, welche das kleinste Element des Heaps zurückgibt, ohne es aus der Datenstruktur zu löschen. Wie kann man GETMIN effizient implementieren (Sie dürfen direkt auf die Fibonacci-Heap Datenstruktur zugreifen) und was ist die Zeitkomplexität von GETMIN?

(b) Nun möchten wir zusätzlich zu GETMIN auch noch eine Operation GETSECONDMIN zur Verfügung stellen, welche das zweitkleinste Element zurückgibt. Wie kann man GETSECONDMIN aus den Operationen INSERT, EXTRACTMIN, DECREASEKEY und GETMIN zusammensetzen? Was ist die amortisierte Laufzeit von GETSECONDMIN? Was ist die worst-case Laufzeit von GETSECONDMIN?

(c) Wir möchten nun bei einem (a, b)-Baum T zusätzlich eine Operation GETELEMENTAT(i) unterstützen, welche das i-te Element der sortierten Liste aller in T enthaltenen Elemente zurückgibt. Wie muss man die Datenstruktur des (a, b)-Baums anpassen, um GETELEMENTAT(i) effizient anbieten zu können und was ist die Laufzeit von GETELEMENTAT(i)?

(3+8+9=20 Punkte)

Aufgabe 5

Sie wissen aus den Übungen, dass das Problem CLIQUE (gegeben ein Graph G und eine Zahl k, hat G eine Clique der Grösse k?) NP-vollständig ist. Zeigen Sie, dass das folgende Problem HALF-CLIQUE NP-vollständig ist:

HALF-CLIQUE:
Eingabe: $G = (V, E)$
Frage: Besitzt G eine Clique der Grösse $\lfloor |V|/2 \rfloor$?

(20 Punkte)