ETH Zürich
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger,
Florian Meier und Ralph Keusch

HS 2016

Algorithmen und Komplexität
Challenge-Aufgabe

Die Bearbeitung der Challenge-Aufgabe ist optional. Der erste, der eine korrekte Lösung abgibt wird als Gewinner gekürt und erhält ein Buch voller spannender Geschichten (siehe Liste unten). Bei mehreren korrekten Abgaben innerhalb desselben Tages gewinnt die schönste Lösung. Lösungen oder Teillösungen können Sie direkt bei der Übungsleitung per E-Mail oder auch persönlich abgeben. Es ist Ehrensache, dass man eine Challenge-Aufgaben nur dann abgibt (und damit einen Buchpreis gewinnen kann), wenn man sie ohne fremde Hilfe gelöst hat!!!

Der Gewinner darf aus folgender Buchliste wählen:

- Peter Winkler: Mathematical Puzzles - A Connoisseur's Collection
- Béla Bollobás: The Art of Mathematics - Coffee Time in Memphis
- Simon Singh: Fermats letzter Satz
- Martin Aigner und Günter Ziegler: Das Buch der Beweise
- Angelika Steger: Diskrete Strukturen 1: Kombinatorik, Graphentheorie, Algebra

⋆ ⋆ ⋆

Challenge-Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren einen Graphen $G = (V, E)$ wie folgt: Die Knotenmenge V sei die Menge aller Bitstrings der Länge $2n$, die genau n Nullen und n Einsen haben. Für zwei unterschiedliche Bitstrings x, y sei die Kante $\{x, y\}$ genau dann vorhanden, wenn man y aus x erzeugen kann, indem man ein beliebiges Bit aus x löscht und ein neues Bit an beliebiger Position hinzufügt. Es darf sowohl eine Null als auch eine Eins herausgenommen und eingesetzt werden.

Im Fall $n = 2$ sind beispielsweise die beiden Bitstrings $x = 1010$ und $y = 0110$ benachbart, denn wir können die erste Eins von x eine oder zwei Stellen nach rechts "verschieben".

Beweisen Sie folgende Behauptung: Es gibt eine Teilmenge $S \subset V$ der Grösse $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, so dass jeder Knoten aus $V \setminus S$ einen Nachbarknoten in S besitzt.

Hint: Suchen Sie eine geschickte Funktion f, die jedem solchen Bitstring eine natürliche Zahl zuordnet, betrachten Sie die Restklassen $f(x) \mod (n+1)$ und finden Sie so einen "Kandidaten"S. Zeigen Sie anschliessend, dass S die gewünschte Eigenschaft erfüllt.