ETH Zürich
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger,
Florian Meier und Ralph Keusch

HS 2016

Algorithmen und Komplexität
Challenge-Aufgabe

Die Bearbeitung der Challenge-Aufgabe ist optional. Der erste, der eine korrekte Lösung abgibt wird als Gewinner gekürt und erhält ein Buch voller spannender Geschichten (siehe Liste unten). Bei mehreren korrekten Abgaben innerhalb desselben Tages gewinnt die schönste Lösung. Lösungen oder Teillösungen können Sie direkt bei der Übungsleitung per E-Mail oder auch persönlich abgeben. Es ist Ehrensache, dass man eine Challenge-Aufgaben nur dann abgibt (und damit einen Buchpreis gewinnen kann), wenn man sie ohne fremde Hilfe gelöst hat!!!

Der Gewinner darf aus folgender Buchliste wählen:

- Peter Winkler: Mathematical Puzzles - A Connoisseur's Collection
- Béla Bollobás: The Art of Mathematics - Coffee Time in Memphis
- Simon Singh: Fermats letzter Satz
- Martin Aigner und Günter Ziegler: Das Buch der Beweise
- Angelika Steger: Diskrete Strukturen 1: Kombinatorik, Graphentheorie, Algebra

⋆ ⋆ ⋆

Challenge-Aufgabe

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, bei welchem wir auch Self-Loops erlauben. Dann ist ein *Trail* ein Weg auf dem Graphen, so dass keine Kante mehrfach benützt wird, aber einzelne Knoten durchaus mehrfach besucht werden dürfen.

(a) Sei $G = (V, E)$ ein Graph, so dass bei jedem Knoten höchstens ein Self-Loop existiert und jeder Trail höchstens zwei Kanten enthält. Zeigen Sie, dass G höchstens $n = |V|$ viele Kanten enthält.

(b) Gegeben seien ℓ unterschiedliche natürliche Zahlen $1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_\ell \leq N$, so dass es keine drei unterschiedliche Zahlen a_i, a_j, a_k gibt mit der Eigenschaft

$$a_i \text{ teilt das Produkt } a_j \cdot a_k.$$

Beweisen Sie, dass $\ell \leq \pi(N) + N^{2/3}$ gilt, wobei $\pi(N)$ die Anzahl Primzahlen in der Menge $\{1, \ldots, N\}$ bezeichnet.