ETH Zürich
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger

WS 2005/06
Klausur

Klausur: Algorithmen und Komplexität

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen trifft zu? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Es gilt $n \log n = O(n^2)$.

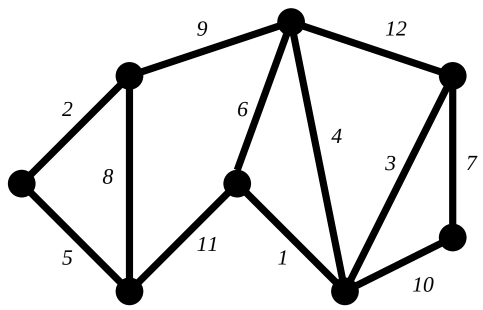
(b) Der Algorithmus QUICKSORT benötigt im schlechtesten Fall $O(n \log n)$ Vergleiche um ein Feld von n Zahlen zu sortieren.

(c) Der Algorithmus KRUSKAL kann nicht schneller implementiert werden als mit Laufzeit $O(nm)$, wobei n die Anzahl Knoten und m die Anzahl Kanten des Graphen bezeichnen.

(d) Es gibt einen auf Vergleichen basierenden Suchbaum, der die Operationen INSERT und EXTRACTMIN in $O(1)$ amortisierter Zeit ausführt.

Aufgabe 2

(a) Bestimmen Sie einen minimalen Spannbaum des untenstehenden Graphen. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.



(b) Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender ungerichter Graph mit Kantengewichten $w : E \to \mathbb{N}$. Beachten Sie, dass die Kantengewichte nicht unterschiedlich sein müssen. Sei e eine Kante mit minimalem Gewicht, d.h., $w(e) = \min\{w(f) : f \in E\}$.

Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

1. Es gibt einen minimalen Spannbaum der e enthält.
2. Alle minimalen Spannbäume enthalten e.

Aufgabe 3

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine *Partition* der Knotenmenge von G ist eine Menge $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ mit $P_i \subseteq V$ wobei für alle $1 \leq i \neq j \leq k$ gilt $P_i \cap P_j = \emptyset$ und $\cup_{i=1}^{k} P_i = V$. Eine Knotenmenge $C \subseteq V$ heisst *Clique* falls der durch C induzierte Teilgraph vollständig ist, d.h., für $v, w \in C$, mit $v \neq w$ gilt $\{v, w\} \in E$.
Das Entscheidungsproblem k-Cliquen Partition ist folgendes.

Eingabe:	$G = (V, E)$ ungerichteter Graph
Frage:	Gibt es eine Partition der Knotenmenge von G in höchstens k Teilmengen, so dass jede dieser Teilmengen eine Clique in G ist?

(a) Zeigen Sie, dass 2-Cliquen Partition in polynomieller Zeit lösbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass 3-Cliquen Partition $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

Hinweis: Denken Sie an das Komplement des Graphen und an Färbungsprobleme.

Aufgabe 4

Betrachten Sie folgenden Algorithmus.

1: Eingabe: Graph $G = (V, E)$
2: $d = 0$
3: $n = |V|$
4: **for all** $v \in V$ **do**
5:     **for all** $w \in V$ wobei w Nachbar von v ist **do**
6:         $d = d + 1$
7:     **end for**
8: **end for**
9: $d = d/n$
10: **return** d

Bitte beantworten Sie folgende Fragen mit Begründung.

(a) Was berechnet dieser Algorithmus?

(b) Welche Laufzeit hat der Algorithmus (bei entsprechender Implementierung von Zeile) wenn der Graph als Adjazenzliste gegeben ist?

(c) Welche Laufzeit hat der Algorithmus (bei entsprechender Implementierung von Zeile) wenn der Graph als Adjazenzmatrix gegeben ist?

Aufgabe 5

Betrachten Sie die Rekursionsgleichung

$$A_{n,k} = A_{n-1,k-1} + A_{n-1,k} \qquad \text{für } n, k \in \mathbb{N} \text{ und } n, k \geq 1$$

mit den Randbedingungen

$$A_{0,k} = 1$$
$$A_{n,0} = 1.$$

Geben Sie einen Algorithmus in *kommentiertem* Pseudocode an, der zu gegebenen $n, k \in \mathbb{N}_0$ den Wert $A_{n,k}$ in Zeit $O(nk)$ bestimmt.

Aufgabe 6

Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, A)$ mit n Knoten und m Kanten. Zeigen Sie, dass man in Zeit $O(n + m)$ entscheiden kann, ob G einen gerichteten Kreis enthält.