Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger

2. März 2007

Algorithmen und Komplexität (D-MATH)
Klausur Frühling 2007

Kandidat/in:

Name: ....

Vorname: ....

Stud.-Nr.: ....

Ich bezeuge mit meiner Unterschrift, dass ich die Prüfung unter regulären Bedingungen ablegen konnte und dass ich die unten stehenden allgemeinen Bemerkungen gelesen und verstanden habe.

Unterschrift: ....

Allgemeine Bemerkungen und Hinweise:

- Diese Prüfung besteht neben diesem doppelseitigen Deckblatt aus einem beidseitig bedruckten Aufgabenblatt mit insgesamt fünf Aufgaben.
- Als einziges Hilfsmittel sind 10 beidseitig handschriftlich beschriebene A4-Blätter erlaubt.
- Falls Sie während der Prüfung in irgendeiner Weise gestört oder beeinträchtigt werden, melden Sie dies sofort der Aufsichtsperson. Spätere Klagen werden nicht akzeptiert.
- **Schreiben Sie nicht mit Bleistift! Abgaben, die mit Bleistift geschrieben sind, werden nicht bewertet.**
- Alle Mobiltelefone müssen vollständig ausgeschaltet sein.
- **Alle Antworten müssen für den Korrektor verständlich begründet werden. Schreiben Sie die wesentlichen Lösungsgedanken in klaren Sätzen oder Stichworten hin. Unverständliche oder nicht begründete Antworten werden nicht bewertet.**
- Pro Aufgabe ist höchstens eine gültige Version eines Lösungsversuchs zulässig. Streichen Sie ungültige Lösungsversuche klar durch.
- Sie dürfen alle Aufgaben in beliebiger Reihenfolge lösen. Konzentrieren Sie sich jeweils auf eine Aufgabe, aber teilen Sie sich Ihre Zeit ein.
- Abschreiben und sonstige Versuche des Betrugs führen zum sofortigem Ausschluss von der Prüfung und können rechtliche Folgen haben.
- Die Prüfung dauert zwei Stunden. Falls Sie vorzeitig fertig werden sollten, melden Sie sich durch Handaufhalten bei einer der Aufsichtspersonen und verlassen Sie still den Raum. **In den letzten 20 Minuten der Prüfung kann der Raum nicht mehr verlassen werden.**
- **Vergessen Sie nicht, dieses Deckblatt zu unterschreiben, und beschriften Sie jedes abgegebene Blatt mit Ihrem Namen. Das Aufgabenblatt ist mit abzugeben.**

Viel Erfolg!

Name: ....

Vorname: ....

Stud.-Nr.: ....

	Erreichte Punktzahl (maximal)	Visum
1	(10)	
2	(4)	
3	(8)	
4	(10)	
5	(8)	
Σ	(40)	

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen trifft zu? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Ein Graph mit zwei gleichen Kantengewichten hat mindestens zwei verschiedene minimale Spannbäume.

(b) Aus $f(n) = \mathcal{O}(n^{17})$ und $g(n) = \Omega(n^{16})$ folgt $f(n) + g(n) = \mathcal{O}(n^{17})$.

(c) Aus $f(n) = \Omega(n^{17})$ und $g(n) = \mathcal{O}(n^{16})$ folgt $f(n) + g(n) = \Omega(n^{17})$.

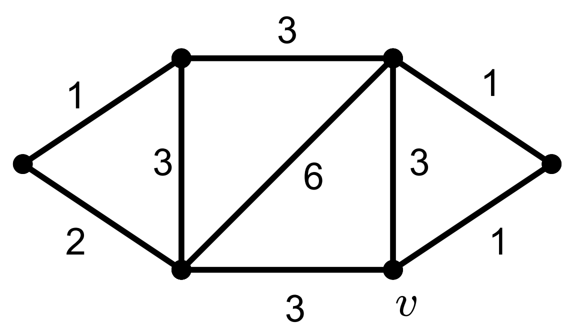
(d) 2-SAT ist in $\mathcal{NP}$.

(e) Wenn für beide Algorithmen die bestmöglichen (in der Vorlesung behandelten) Datenstrukturen verwendet werden, ist der Algorithmus von Prim schneller als der Algorithmus von Kruskal.

(5 · 2 Punkte)

Aufgabe 2

(a) Bestimmen Sie für untenstehenden Graphen einen Spannbaum, der einen kürzesten Weg von v zu jedem anderen Knoten enthält. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.



(2 Punkte)

(b) Erklären Sie in zwei bis drei Sätzen, warum das kürzester-Pfad-Problem schwieriger wird, wenn negative Kantengewichte erlaubt sind.

(2 Punkte)

Aufgabe 3

Es seien n Intervalle $[a_i, b_i]$ durch ihre Anfangs- und Endpunkte $a_i, b_i \in \mathbb{N}$ gegeben. Geben sie einen Algorithmus an, der in Zeit $\mathcal{O}(n \log n)$ eine maximale Menge von paarweise disjunkten Intervallen findet.

(8 Punkte)

Hinweis. Überlegen Sie sich, welches Intervall bestimmt zu einer optimalen Lösung gehört, und iterieren Sie.

Aufgabe 4

Sei A eine nichtleere Menge. Es bezeichne $x = x_1 x_2 \dots x_n$ mit $x_i \in A$ eine *Sequenz* der Länge n über A. Jede Sequenz, die aus x durch auslassen von gewissen (eventuell keinem) x_i gewonnen werden kann, heisst *Teilsequenz* von x. Beispielsweise sind *abc* und *bbde* Teilsequenzen von *aabbbbcde*, *adf* und *bac* jedoch nicht.

In den Übungen haben wir einen Algorithmus kennengelernt, der mittels dynamischer Programmierung die Länge einer längsten gemeinsamen Teilsequenz zweier gegebener Sequenzen $x = x_1 \dots x_n$ und $y = y_1 \dots y_m$ bestimmt.

(a) Beschreiben Sie diesen Algorithmus in drei bis vier Sätzen, und geben Sie dessen Laufzeit an. Geben Sie die Rekursionsgleichungen an, ohne sie zu begründen.

(4 Punkte)

(b) Beschreiben Sie, wie man diesen Algorithmus modifizieren muss, damit er die Länge eines längsten gemeinsamen Teil*strings* findet, d.h., einer Teilsequenz, die *am Stück* in x und y enthalten ist. (Beispielsweise sind *aa* und *bbcde* Teilstrings von *aabbbbcde*, *abc* und *bbde* jedoch nicht.)

(4 Punkte)

Hinweis. Vermutlich müssen Sie eine geeignet definierte Hilfsvariable $s_{i,j}$ einführen.

(c) Beschreiben Sie in zwei bis drei Sätzen, wie man den Algorithmus dahingehend erweitern kann, dass er auch einen längsten gemeinsamen Teilstring von x und y ausgibt.

(2 Punkte)

Aufgabe 5

Ein Hamiltonkreis eines Graphen ist ein *Kreis*, der jeden Knoten des Graphen genau einmal besucht. Dagegen ist ein Hamiltonpfad ein *Pfad*, der jeden Knoten des Graphen genau einmal besucht. Es sei bekannt, dass das Problem zu entscheiden, ob ein gegebener Graph einen Hamiltonpfad besitzt, $\mathcal{NP}$-vollständig ist. Verwenden Sie dieses Resultat um zu zeigen, dass das Problem, zu entscheiden, ob ein Graph einen Hamiltonkreis besitzt, $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

(8 Punkte)