

Algorithmen und Komplexität Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Wir wollen aus einer Liste von $2n$ natürlichen Zahlen Pärchen erstellen, so dass jede Zahl in genau einem Pärchen enthalten ist und die maximale Summe der zwei Zahlen in einem Pärchen minimiert wird. Aus den Zahlen 1, 11, 3, 12, 8, 15 würden wir zum Beispiel die Pärchen (1, 15), (3, 12) und (11, 8) erstellen. Entwerfen Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n \log n)$ und beweisen Sie Laufzeit und Korrektheit.

Aufgabe 2

Gegeben sei ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichtung $w : E \rightarrow [0, 1]$. Wir interpretieren $w(e)$ als die Wahrscheinlichkeit, dass eine Übertragung über die Kante e erfolgreich ist.

Beschreiben Sie in präzisen Worten einen effizienten Algorithmus, der den zuverlässigsten Übertragungspfad zwischen zwei Knoten bestimmt. Die Erfolgswahrscheinlichkeiten bei der Übertragung seien voneinander unabhängig.

Aufgabe 3

Ein Turnier ist ein gerichteter Graph $D = (V, A)$ in welchem für jedes Paar von Knoten $u, v \in V$ entweder $(u, v) \in A$ oder $(v, u) \in A$ gilt. Es sei nun zu jedem Turnier eine Adjazenzmatrix $A = (a_{u,v})$ gegeben in welcher für $u, v \in V$ gilt, dass $a_{u,v} = 1$ falls $(u, v) \in A$ und $a_{u,v} = 0$ falls $(u, v) \notin A$.

- Beweisen Sie, dass es in jedem Turnier einen gerichteten Pfad der Länge $|V|$ gibt. (Als Länge nehmen wir hier die Anzahl Knoten auf dem Pfad.)
- Beschreiben Sie einen Algorithmus welcher in $O(|V|^2)$ Operationen einen solchen Pfad findet.
- Beschreiben Sie einen Algorithmus welcher einen solchen Pfad findet und dabei nur auf $O(|V| \log |V|)$ Elemente von A zugreift.
- Beweisen Sie, dass es für dieses Problem keinen Algorithmus gibt welcher nur auf $O(|V|)$ Elemente von A zugreift.

ABGABE DER HAUSAUFGABEN IN DER VORLESUNG AM 25.10.2016.