ETH Zürich
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger
Florian Meier, Ralph Keusch

HS 2016
Abgabe 8.11.2016

Algorithmen und Komplexität
Übungsblatt 7

Diese Serie wird mit Punkten bewertet, damit Sie ein besseres Gefühl dafür bekommen, wieviele Punkte Ihre Lösung an der Prüfung erhalten würde.

Aufgabe 1

Wir betrachten folgenden Algorithmus:
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit einer Gewichtsfunktion $\ell\colon E \to \mathbb{Z}$. Am Anfang seien alle Kanten ungefärbt. Wende wiederholt eine der beiden folgenden Regeln an:

- *Rote Regel:* Wähle eine Teilmenge $\varnothing \neq W \subset V$, so dass der Schnitt $(W, V \setminus W)$ keine rote Kante enthält. Wähle eine ungefärbte Kante $e_0 \in (W, V \setminus W)$ aus dem Schnitt mit

$$\ell(e_0) = \min\{\ell(e) \mid e \in (W, V \setminus W),\ e \text{ ungefärbt}\}$$

  und färbe e_0 rot.

- *Graue Regel:* Wähle einen Kreis C, der keine graue Kante enthält. Wähle eine ungefärbte Kante $e_1 \in C$ mit

$$\ell(e_1) = \max\{\ell(e) \mid e \in C,\ e \text{ ungefärbt}\}$$

  und färbe e_1 grau.

Der Algorithmus stoppt, sobald entweder alle Kanten gefärbt sind oder die roten Kanten mit allen Knoten einen zusammenhängenden Graphen bilden.
Beweise: Obiger Algorithmus terminiert, und alle roten Kanten bilden dann einen minimalen Spannbaum.

(10 Punkte)

Aufgabe 2

Aus der Vorlesung kennen Sie das RUCKSACKPROBLEM:

> Gegeben sind eine Kapazität $B \in \mathbb{N}$ und n Objekte mit Gewichten $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{N}$ und Profiten $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$.
>
> Gesucht ist ein $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $\sum_{i \in I} w_i \leq B$ und
>
> $$\sum_{i \in I} p_i = \max\Big\{\sum_{i \in I'} p_i \mid I' \subseteq \{1, \ldots, n\} \text{ mit } \sum_{i \in I'} w_i \leq B\Big\}.$$

Wir nehmen hier zusätzlich an, dass die Gewichte beschränkt sind: $w_i \leq n^2$ für alle i. Beachten Sie, dass die Profite unbeschränkt sind!

(a) Formulieren Sie einen Algorithmus, der in polynomieller Zeit den Wert $\sum_{i \in I} p_i$ einer optimalen Lösung berechnet und beweisen Sie die Korrektheit des Algorithmus. *(7 Punkte)*

(b) Wie muss Ihr Algorithmus modifiziert werden, um auch die Lösung I zu berechnen?

(3 Punkte)

Aufgabe 3

Sei A eine nichtleere Menge. Es bezeichne $x = x_1 x_2 \dots x_n$ mit $x_i \in A$ eine *Sequenz* der Länge n über A. Jede Sequenz, die aus x durch Auslassen von gewissen (eventuell keinem) x_i gewonnen werden kann, heisst *Teilsequenz* von x. Beispielsweise sind *abc* und *bbde* Teilsequenzen von *aabbbbcde*, *adf* und *bac* jedoch nicht.

Beim Problem der LÄNGSTEN GEMEINSAMEN TEILSEQUENZ sind zwei Sequenzen $x = x_1 \dots x_n$ und $y = y_1 \dots y_m$ gegeben. Gesucht ist eine *längste* Sequenz z, die sowohl von x als auch von y Teilsequenz ist.

Geben Sie einen Algorithmus an, der dieses Problem in Zeit $\mathcal{O}(nm)$ löst und beweisen Sie die Korrektheit des Algorithmus.

Hinweis. Jede Sequenz $x^{(k)} = x_1 x_2 \dots x_k$ mit $k = 0, \dots, n$ heisst *Präfix* der Sequenz $x = x_1 x_2 \dots x_n$. Dabei steht der Fall $k = 0$ für das leere Präfix. Betrachten Sie die Präfixe von x und y, und verwenden Sie das algorithmische Prinzip der dynamischen Programmierung. *(10 Punkte)*

ABGABE DER HAUSAUFGABEN IN DER VORLESUNG AM 8.11.2016.