ETH Zürich
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger
Ralph Keusch, Florian Meier

HS 2016
Abgabe 06.12.2016

Algorithmen und Komplexität
Übungsblatt 11

Aufgabe 1

Eine boolsche Funktion auf n Variablen ist eine Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

a) Berechnen Sie die Anzahl boolscher Funktionen auf n Variablen.

b) Zeigen Sie, dass jede boolsche Funktion durch eine KNF-Formel (d.h. boolsche Formel in konjunktiver Normalform, siehe Definition 5.8) dargestellt werden kann.

c) Beschreiben Sie, wie man eine beliebige Formel als Schaltkreis darstellen kann, und schliessen Sie daraus, dass auch jede boolsche Funktion als Schaltkreis dargestellt werden kann.

d) Benützen Sie Satz 5.7 und Teilaufgabe c), um zu folgern, dass es für jede boolsche Funktion f auf n Variablen einen Schaltkreis mit höchstens $3 \cdot 2^n$ vielen Gattern gibt, der f berechnet.

Aufgabe 2

a) Sei die Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ wie folgt definiert:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Finden Sie eine KNF F mit insgesamt nur n^2 Literalen, so dass $F(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$ für alle Belegungen von $x_1, \ldots, x_n$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass es für jedes $k \geq 1$ eine boolsche Funktion gibt, die *nicht* durch eine k-KNF-Formel (d.h. boolsche Formel in konjunktiver Normalform mit höchstens k Literalen pro Klausel) dargestellt werden kann.

Aufgabe 3

Eine boolsche Formel F in disjunktiver Normalform (DNF) ist von der Bauart

$$F = D_1 \vee D_2 \vee \cdots \vee D_m,$$

wobei jede der m Klauseln eine Konjunktion $D_i = y_{i_1} \wedge y_{i_2} \wedge \cdots \wedge y_{i_k}$ von höchstens k Literalen ist. Wir nehmen an dass es total n Variablen gibt. Zeigen Sie, dass man in *linearer* Zeit in der Eingabegrösse entscheiden kann, ob eine gegebene boolsche Formel F in disjunktiver Normalform erfüllbar ist.

ABGABE DER HAUSAUFGABEN IN DER VORLESUNG AM 06.12.2016.