Eidgenössische
Technische Hochschule
Zürich

Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo
Federal Institute of Technology at Zurich

Institut für Theoretische Informatik
Peter Widmayer
Thomas Tschager

25. Februar 2016

Datenstrukturen & Algorithmen — Blatt 1 — FS 16

Für die $\mathcal{O}$-Notation gibt es noch eine andere als die in der Vorlesung vorgestellte Definition, und zwar: Für eine Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ gilt

$$\mathcal{O}(g) := \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \;\middle|\; \exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 : f(n) \leq cg(n) \right\}. \tag{1}$$

Analog wächst f nicht langsamer als g, wenn $f \in \Omega(g)$ gilt mit

$$\Omega(g) := \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \;\middle|\; \exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 : f(n) \geq cg(n) \right\}. \tag{2}$$

Die Funktion f wächst asymptotisch gleich schnell wie g, wenn $f \in \mathcal{O}(g)$ und $f \in \Omega(g)$ gelten. Man schreibt dies als $f \in \Theta(g)$ oder auch $f = \Theta(g)$.

Für die folgenden Aufgaben können Sie wahlweise die Definition aus der Vorlesung oder die Definition oben benützen.

Aufgabe 1.1 *Die Menge $\Theta(g)$.*

Zeigen Sie mit einem Gegenbeispiel, wieso die rechte Seite der folgenden Gleichung *falsch* ist:

$$\Theta(g) = \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \;\middle|\; \exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 : f(n) = cg(n) \right\}.$$

Geben Sie stattdessen eine korrekte, möglichst einfache geschlossene Definition für die Menge $\Theta(g)$ an (d.h. mit möglichst wenigen Parametern, Quantoren etc. in der Definition), analog zu den obigen Definitionen der Mengen $\mathcal{O}(g)$ und $\Omega(g)$.

Aufgabe 1.2 *Eigenschaften der $\mathcal{O}$-Notation.*

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Es seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$.

a) $f \in \mathcal{O}(g)$ genau dann, wenn $g \in \Omega(f)$.

b) Falls $f \in \mathcal{O}(g)$, dann ist $f(n) \leq g(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Falls $f(n) \leq g(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $f \in \mathcal{O}(g)$.

d) Es gibt verschiedene Funktionen f und g mit $f \in \Omega(g)$ und $g \in \Omega(f)$.

e) Es ist $\log_a(n) \in \Theta(\log_b(n))$ für alle Konstanten $a, b \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.

f) Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(g)$ und $f(n) := f_1(n) + f_2(n)$. Dann ist auch $f \in \mathcal{O}(g)$.

g) Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(g)$ und $f(n) := f_1(n) \cdot f_2(n)$. Dann ist auch $f \in \mathcal{O}(g)$.

h) Für alle $a, b \in \mathbb{N}$, $a \leq b$, gilt $n^{1/a} \in \Theta(n^{1/b})$.

Bitte wenden.

Aufgabe 1.3 *Asymptotisches Wachstum von Funktionen.*

Geben Sie für die untenstehenden Funktionen eine **Reihenfolge** an, so dass folgendes gilt: Wenn eine Funktion f links von einer Funktion g steht, dann gilt $f \in \mathcal{O}(g)$.

Beispiel: Die drei Funktionen n^3, n^7, n^9 sind bereits in der entsprechenden Reihenfolge, denn es sind $n^3 \in \mathcal{O}(n^7)$ und $n^7 \in \mathcal{O}(n^9)$.

$$n^5 + n,\ \log(n^4),\ \sqrt{n},\ \binom{n}{3},\ 2^{16},\ n^n,\ n!,\ \frac{2^n}{n^2},\ \log^8(n)$$

Abgabe: Am Mittwoch, den 2. März 2016 in Ihrer Übungsgruppe.