Eidgenössische
Technische Hochschule
Zürich

Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo
Federal Institute of Technology at Zurich

Institut für Theoretische Informatik
Peter Widmayer
Thomas Tschager

2. März 2016

Datenstrukturen & Algorithmen Blatt 2 FS 16

Aufgabe 2.1 *Asymptotische Laufzeit einschätzen.*

Geben Sie die asymptotische Laufzeit folgender Java-Codefragmente in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ (so knapp wie möglich) in Θ-Notation an.

```
1 for (int i = 1; i <= n; i = i · 2) {
2         for (int j = n; j > 1; j −= 10)
3               ;
4 }
```

```
1 for (int i = n; i > 0; i −= 5) {
2         for (int j = 0; j < i; j += 1) {
3               int k = 1;
4               while (k · k <= n)
5                     k = k + 2;
6         }
7 }
```

```
1 int f (int n) {
2         if (n == 1) return 1;
3         else {
4               for (int i = 1; i <= 2n; i ++)
5                     ;
6               return f(n/2)+1;
7         }
8 }
```

Aufgabe 2.2 *Rekursionsgleichungen.*

Gegeben sei eine Rekursionsgleichungen der Art

$$T(n) = \begin{cases} aT(\frac{n}{b}) + cn + d & \text{falls } n > 1 \\ e & \text{falls } n = 1 \end{cases}$$

mit $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}$, $a \neq b, a \neq 1$ und $b > 1$. Berechnen Sie durch Teleskopieren eine Gleichung in Summenschreibweise. Wenden Sie dann die geometrische Summenformel ($\sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}$ für $q \neq 1$) an, um eine geschlossene Form zu finden. Beweisen Sie Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion. Sie dürfen dabei annehmen, dass n eine Potenz von b ist.

Bitte wenden.

Aufgabe 2.3 *Offene Hashverfahren.*

a) Fügen Sie die Schlüssel $10, 18, 2, 4, 17$ in dieser Reihenfolge in eine anfangs leere Hashtabelle der Grösse 7 ein. Benutzen Sie offenes Hashing mit der Hashfunktion $h(k) = k \bmod 7$ und führen Sie zur Kollisionsauflösung jeweils

(i) lineares Sondieren (nach links),

(ii) quadratisches Sondieren (nach links, rechts, links, ...) und

(iii) Double Hashing mit $h'(k) = 1 + (k \bmod 5)$

aus. Geben Sie auch jeweils die Anzahl der Kollisionen an. Welche Variante ist für die obige Situation die beste?

b) Welches Problem tritt auf, wenn der Schlüssel 10 aus den Hashtabellen aus a) entfernt werden soll, und wie kann es gelöst werden? Welche Probleme ergeben sich, wenn sehr viele Schlüssel aus einer Hashtabelle gelöscht werden?

c) Geben Sie eine Sequenz von Einfügeoperationen an, bei der quadratisches Sondieren mehr Kollisionen als lineares Sondieren erzeugt. Geben Sie eine Regel an, nach der solch eine Sequenz *beliebiger* Länge n gebildet werden kann. Benutzen Sie die Hashfunktion $h(k) = k \bmod m$ für eine Primzahl m mit $m \geq n$.

Aufgabe 2.4 *Kuckucks-Hashing (Cuckoo hashing).*

Cuckoo hashing ist ein Hashverfahren mit der Besonderheit, dass für die Suche und das Entfernen eines Schlüssels in *jedem* Fall nur konstante Zeit benötigt wird. Um das zu erreichen, werden zwei Tabellen T_1 und T_2 gleicher Grösse und zwei Hashfunktionen h_1 und h_2 verwendet. Ein neuer Schlüssel x wird an Position $h_1(x)$ in T_1 gespeichert. Falls es dabei zu einer Kollision kommt, wird der bisher gespeicherte Schlüssel y verdrängt und an Position $h_2(y)$ in T_2 eingefügt. Verdrängt er dabei einen weiteren Schlüssel, so wird dieser wiederum in T_1 eingefügt usw.

Es gibt Situationen, in denen dieses Verfahren nicht terminiert. Nach einer gewissen Anzahl von Einfügeoperationen für verdrängte Schlüssel tritt also dieselbe Tabellenkonfiguration wie zu Beginn auf. In dieser Aufgabe soll ein solcher Fall illustriert werden.

a) Gegeben seien zwei Tabellen mit je 5 Einträgen und zwei Hashfunktionen $h_1 = k \bmod 5$ und $h_2 = \lfloor k/5 \rfloor \bmod 5$. Fügen Sie die folgenden Schlüssel in dieser Reihenfolge in zu Beginn leere Hashtabellen ein: $3, 16, 18, 23, 1$.

b) Finden Sie nun einen weiteren Schlüssel, bei dem das oben beschriebene Verfahren nicht terminiert. (In diesem Fall würde man zwei neue Tabellen anlegen und die gespeicherten Schlüssel mit zwei neuen Hashfunktionen in den neuen Tabellen speichern.)

Abgabe: Am Mittwoch, den 9. März 2016 in Ihrer Übungsgruppe.