

Institut für Theoretische Informatik  
Peter Widmayer  
Thomas Tschager  
Antonis Thomas

25. Mai 2016

## Datenstrukturen & Algorithmen

## Blatt 13

## FS 16

### Aufgabe 13.1 *Matchings.*

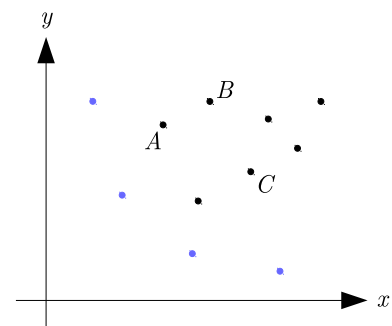
Geben Sie einen zusammenhängenden Graphen mit 6 Knoten an, der **genau** 3 verschiedene perfekte Matchings besitzt. Ein Matching ist *perfekt*, wenn kein Knoten alleine bleibt, d.h. wenn jeder Knoten genau einem anderen Knoten zugeordnet ist.

Die folgenden beiden Aufgaben widmen sich Scanline-Algorithmen zur Lösung geometrischer Probleme. Jede Beschreibung eines Scanline-Algorithmus sollte die folgenden Aspekte umfassen.

- 1) Haltepunkte. In welche Richtung verläuft die Scanline? Was sind die Haltepunkte?
- 2) Scanline-Datenstruktur. Welche Objekte muss die Datenstruktur verwalten? Welche Operationen müssen unterstützt werden? Was ist eine angemessene Datenstruktur?
- 3) Aktualisierung. Was passiert, wenn die Scanline auf einen neuen Haltepunkt trifft?
- 4) Auslesen der Lösung. Wie lässt sich die Lösung auslesen?

### Aufgabe 13.2 *Nicht-dominierte Punkte.*

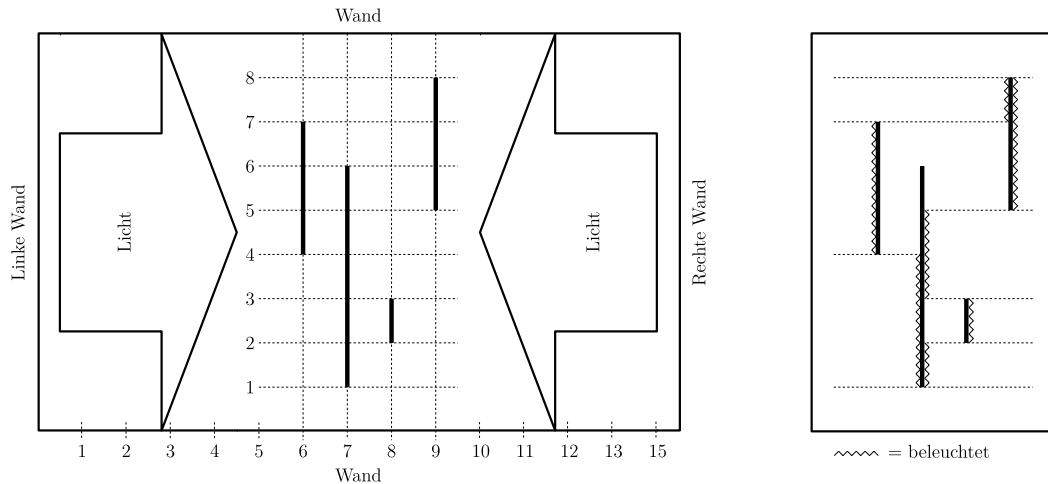
Sei eine Menge von Punkten in der Ebene gegeben. Wir sagen, dass ein Punkt  $(x, y)$  einen anderen Punkt  $(x', y')$  *dominiert*, wenn  $x < x'$  und gleichzeitig  $y < y'$  gilt. In der nebenstehenden Abbildung wird beispielsweise der Punkt  $B$  vom Punkt  $A$  dominiert, aber nicht vom Punkt  $C$ . Die Menge aller nicht-dominierten Punkte ist blau eingezeichnet. Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Scanline-Algorithmus, der für eine gegebene Menge von  $n$  Punkten die Menge aller nicht-dominierten Punkte berechnet. Geben Sie zudem die Laufzeit Ihrer Lösung an.



### Aufgabe 13.3 *Kunstwerk (Klausuraufgabe im Jänner 2015).*

Ein Künstler fertigt einen Grundrissplan seines Kunstwerks an, bei dem vertikale Platten mit Laserlicht von der Seite bestrahlt werden.

Es gibt  $n$  Platten mit verschiedenen Positionen und Breiten. Platte  $i$  werde dabei durch ein Tripel  $P_i = (x_i, y_i, b_i)$  repräsentiert, wobei  $x_i$  der Abstand zur linken Wand,  $y_i$  der Abstand zur unten gezeichneten Wand und  $b_i$  die Breite der Platte angeben. Eine mögliche Eingabe für die folgende Skizze wäre beispielsweise  $P_1 = (7, 1, 5)$ ,  $P_2 = (9, 5, 3)$ ,  $P_3 = (8, 2, 1)$  sowie  $P_4 = (6, 4, 3)$ .



Die Platten werden von flächenförmigen Laserlichtquellen (an den Wänden links und rechts) bestrahlt, welche über die gesamte Breite und Höhe des Kunstwerks horizontale Lichtstrahlen aussenden. Licht, welches auf eine Platte trifft, wird vollständig absorbiert. Weil das Licht die Platten erhitzt, muss jede bestrahlte Platte gekühlt werden, und zwar proportional zum Betrag des einfallenden Lichts. Deshalb möchte der Künstler nun *für jede Platte* die gesamte bestrahlte Fläche (als Summe der von links bestrahlten Fläche und der von rechts bestrahlten Fläche) berechnen. Da die Platten vom Fussboden bis zur Decke reichen, ist die Höhe aller Platten gleich und es genügt, anstatt der bestrahlten Fläche die bestrahlte Breite der Platten zu berechnen. Daher liegt wie in der obigen Skizze ein zweidimensionales Problem vor. Wir nehmen an, dass sich keine zwei Platten direkt übereinander befinden oder direkt nebeneinander starten oder enden. Beachten Sie aber, dass wie im obigen Beispiel die Platten der Eingabe nicht notwendigerweise nach  $x$ -Koordinate sortiert sind.

Für jede Platte  $i$  soll die gesamte bestrahlte Breite  $B_i$  als Summe der von links bestrahlten Breite und der von rechts bestrahlten Breite berechnet werden (siehe Abbildung rechts). Für die obige Eingabe soll also  $B_1 = 6$ ,  $B_2 = 4$ ,  $B_3 = 1$  sowie  $B_4 = 3$  ausgegeben werden.

Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Scanline-Algorithmus für das obige Problem. Welche Laufzeit in Abhängigkeit von  $n$  hat Ihr Algorithmus? Begründen Sie Ihre Antwort.

#### Aufgabe 13.4 *Partnervermittlung (Programmieraufgabe).*

Sie arbeiten für eine Partnervermittlungs-Agentur. Die Kunden der Agentur sind als zwei disjunkte Mengen  $M$  (Männer) und  $W$  (Frauen) gegeben. Jeder Kunde beantwortet verschiedene Fragen. Basierend auf den Antworten wird berechnet, ob zwei Kunden  $(m, w)$  mit  $m \in M$  und  $w \in W$  zueinander passen oder nicht.

Nun soll für jeden Kunden höchstens ein Partner gefunden werden, der gut zu ihm passt. Natürlich möchte die Agentur möglichst viele Partnerschaften berechnen. Ihre Aufgabe ist es einen Algorithmus zu implementieren, der für eine gegebene Liste von möglichen Paaren von Kunden  $(m, w)$  mit  $m \in M$  und  $w \in W$  die maximale Anzahl von möglichen Paaren berechnet, sodass jedem Kunden höchstens eine Partnerschaft vorgeschlagen wird.

**Eingabe** Die erste Zeile der Eingabe enthält lediglich die Anzahl  $T$  von Testinstanzen. Dann folgen für jede Testinstanz zuerst eine Zeile, welche die Anzahl  $|M|$  der männlichen Kunden und die Anzahl  $|W|$  der weiblichen Kunden enthält. Die nächste Zeile enthält die Anzahl  $p$  der möglichen Paare und schliesslich folgen  $p$  Zeilen mit den möglichen Paaren, wobei jede Zeile ein Paar von Kunden  $m w$  mit  $m \in M$  und  $w \in W$  enthält.

**Ausgabe** Für jede Testinstanz soll lediglich eine Zeile ausgegeben werden, die die grösstmögliche Anzahl von Paaren für die entsprechende Testinstanz enthält, sodass jedem Kunde höchstens eine Partnerschaft vorgeschlagen wird.

**Beispiel**

*Eingabe:*

---

2  
4 4  
5  
1 2  
1 3  
2 4  
3 1  
4 1  
3 3  
4  
1 3  
2 1  
3 1  
3 2

---

*Ausgabe:*

---

3  
3

---

**Hinweis** Für diese Aufgabe gibt es lediglich ein Testset.

**Abgabe:** Am Mittwoch, den 1. Juni 2016 in Ihrer Übungsgruppe.