Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo
Federal Institute of Technology at Zurich

Departement Informatik
Markus Püschel
Peter Widmayer
Thomas Tschager
Tobias Pröger

10. November 2016

Datenstrukturen & Algorithmen — Blatt 8 — HS 16

Abgabe: Am Donnerstag, den 17.11.2016, vor Beginn der Vorlesung um 10 Uhr im Eingangsbereich vor ML D28. Bitte heften Sie Ihre Blätter zusammen und benutzen Sie dieses Blatt als Deckblatt. Füllen Sie auch die ersten zwei der untenstehenden Felder aus.

Übungsstunde (Raum & Zeit): ______________________

Abgegeben von: ______________________

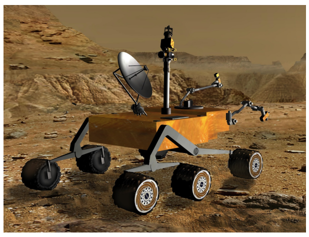
Korrigiert von: ______________________

erreichte Punkte: ____

Aufgabe 8.1 *Marsmission.*

Der Rover *Curiosity* ist auf dem Mars gelandet und befindet sich auf einer Startposition S. Das Ziel ist eine Position Z, und auf dem Weg dorthin sollen möglichst wertvolle Gesteinsproben gesammelt werden. Um nicht zu viel Energie zu verbrauchen, darf der Rover nur Schritte nach Osten (rechts) und nach Süden (unten) ausführen. Der Rover kann eine Gesteinsprobe nur dann einsammeln, wenn er auf dem entsprechenden Feld steht. Der Wert jeder Gesteinsprobe ist in einer $(m \times n)$-Matrix gespeichert, z.B.

S	9	2	5	11	8
17	21	32	5	15	3
2	2	3	8	1	5
8	2	8	11	15	9
0	5	3	10	4	**Z**



In der obigen Matrix ist ein Süd-Ost-Weg von S nach Z eingezeichnet, auf dem der Wert der gesammelten Gesteinsproben maximal ist. Dieser kann durch die Angabe der benutzten Positionen beschrieben werden: $(1,1) \to (2,1) \to (2,2) \to (2,3) \to (2,4) \to \cdots \to (5,6)$.

Geben Sie einen Algorithmus der *dynamischen Programmierung* an, der als Eingabe eine $(m \times n)$-Matrix A mit $A[1,1] = A[m,n] = 0$ erhält und einen Süd-Ost-Weg von $S = (1,1)$ nach $Z = (m,n)$ berechnet, auf dem die gesammelten Gesteinsproben maximalen Wert besitzen. Gesucht wird also der Weg selbst und nicht nur der maximal zu erreichende Wert. Geben Sie auch die Laufzeit Ihres Verfahrens in Abhängigkeit von m und n an.

Bitte wenden.

Aufgabe 8.2 *Wanderung.*

Alice und Bob möchten einen Wanderausflug mit Picknick machen und haben dazu n Gegenstände ausgewählt, die alle mitgenommen werden sollen. Der i-te Gegenstand wiegt $g_i \in \mathbb{N}$ Gramm. Sowohl Alice als auch Bob haben einen (identischen) grossen Rucksack, der alle Gegenstände auf einmal aufnehmen könnte. Der Fairness halber entscheiden sie sich jedoch, die Gegenstände so auf die beiden Rucksäcke aufzuteilen, dass sie annähernd gleich schwer sind. Jeder Gegenstand muss entweder in den einen oder in den anderen Rucksack gepackt werden. Insbesondere kann er weder zuhause gelassen noch aufgeteilt werden. Konkret suchen wir also zwei Mengen A und B von Gegenständen mit $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \{1, \ldots, n\}$, deren Gewichtsdifferenz minimal ist.

Geben Sie einen Algorithmus an, der nach dem Prinzip der dynamischen Programmierung arbeitet und zwei solche Mengen A und B mit minimaler Gewichtsdifferenz (wie oben beschrieben) berechnet. Geben Sie die Laufzeit ihres Verfahrens an. Ist die Laufzeit polynomiell?

Aufgabe 8.3 *Zahlenrätsel.*

Gegeben ist eine Sequenz von n Ziffern $0, \ldots, 9$ und eine positive ganze Zahl σ. Durch geeignetes Einfügen von Pluszeichen zwischen den Ziffern können verschiedene Summen erreicht werden. Ziffern zwischen zwei benachbarten Pluszeichen werden dabei zu einer Dezimalzahl.

Beispiel: Für die Sequenz [6 9 2 5 0 2 1 3] sind z.B. die Summen $69 + 2 + 5 + 0 + 21 + 3 = 100$ und $6 + 9 + 250 + 21 + 3 = 289$ möglich.

Die Aufgabe besteht darin zu entscheiden, ob Pluszeichen so in die Sequenz eingeschoben werden können, dass die Summe genau den Wert σ ergibt.

a) Entwerfen Sie einen effizienten Algorithmus, der diese Aufgabe mittels dynamischer Programmierung löst. Sie dürfen annehmen, dass σ relativ zu n eher klein ist. Geben Sie auch die Laufzeit ihrer Lösung an. Ist diese polynomiell in der Grösse der Eingabe?

   Hinweis: Beachten Sie, dass zunächst nur *entschieden* werden soll, ob die Zahl σ erreicht werden kann.

b) Wie lassen sich alle Möglichkeiten effizient auffinden, um die gewünschte Summe zu erreichen?