Eidgenössische
Technische Hochschule
Zürich

Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo
Federal Institute of Technology at Zurich

Departement Informatik
Markus Püschel
Peter Widmayer
Thomas Tschager
Tobias Pröger

1. Dezember 2016

Algorithmen & Datenstrukturen — Blatt 11 — HS 16

Abgabe: Am Donnerstag, den 08.12.2016, vor Beginn der Vorlesung um 10 Uhr im Eingangsbereich vor ML D28. Bitte heften Sie Ihre Blätter zusammen und benutzen Sie dieses Blatt als Deckblatt. Füllen Sie auch die ersten zwei der untenstehenden Felder aus.

Übungsstunde (Raum & Zeit): ______________________

Abgegeben von: ______________________

Korrigiert von: ______________________

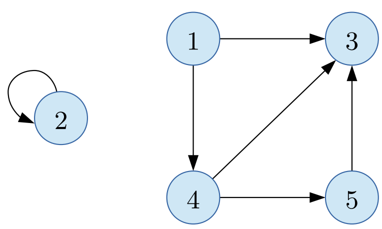
erreichte Punkte: ____

Hinweis: Dieses Blatt behandelt Graphentheorie, deren wichtigste Definitionen wir kurz wiederholen. Ein *gerichteter* Graph $G = (V, E)$ besteht aus einer Menge V von *Knoten* und einer Menge $E \subseteq V \times V$ von *Kanten*. Ein *ungerichter* Graph $G = (V, E)$ besteht ebenfalls aus einer Menge von Knoten V und einer Menge von Kanten E, wobei $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ gilt. In gerichteten Graphen hat eine Kante also eine Richtung und ist konzeptionell ein Paar von Knoten; in ungerichteten Graphen dagegen hat eine Kante keine Richtung und ist konzeptionell eine Menge. Ein bipartiter Graph $G = (V, E)$ ist ein Graph, bei dem die Knotenmenge in zwei disjunkte Mengen U und W aufgeteilt werden kann, sodass jede Kante genau einen Knoten in U und einen Knoten in W hat. Eine Sequenz von Knoten $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ heisst *Weg*, wenn für jedes $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ eine Kante von v_i nach v_{i+1} existiert. Die Länge eines Weges ist $k - 1$, die Anzahl der enthaltenen Kanten. Ein ungerichteter Graph heisst *zusammenhängend*, wenn zwischen jedem Paar von zwei voneinander verschiedenen Knoten v und w ein Weg von v nach w existiert. Ein Weg $\langle v_1, \ldots, v_k, v_{k+1} \rangle$ heisst Zyklus, wenn $v_1 = v_{k+1}$ gilt. Ein Zyklus der Länge 1 heisst *Schleife*. Ein Zyklus heisst *Kreis*, wenn er jeden enthaltenen Knoten (mit Ausnahme des ersten und des letzten Knotens) genau einmal besucht. Ein Graph heisst *zyklenfrei* bzw. *kreisfrei*, wenn er keine Zyklen bzw. Kreise enthält.

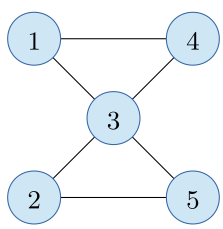
Aufgabe 11.1 *Eigenschaften von Beispielen für Graphen.*

Gegeben seien die folgenden Graphen bzw. Adjazenzmatrizen von Graphen.

(i)



(ii)



Bitte wenden.

$$
\text{(iii)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(iv)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

a) Geben Sie für die Graphen (i) und (ii) ihre Adjazenzmatrix an.

b) Zeichnen Sie die Graphen (iii) und (iv).

c) Geben Sie für jeden der oben dargestellten Graphen (i)–(iv) an, ob sie gerichtet oder ungerichtet sind, ob sie bipartit sind, ob sie kreisfrei sind und ob sie Schleifen besitzen.

d) Untersuchen Sie für jeden *ungerichteten* der vier obigen Graphen zusätzlich, ob sie zusammenhängend sind, und ob sie einen Eulerkreis oder einen Eulerschen Weg besitzen. Begründen Sie Ihre Antwort.

e) Berechnen Sie für den Graphen (i) die reflexive und transitive Hülle. Zeichnen Sie das Ergebnis und geben Sie die entsprechende Adjazenzmatrix an.

f) Zeichnen Sie einen ungerichteten, nicht zusammenhängenden Graphen mit 7 Knoten, von denen genau zwei Grad 3 und alle anderen Grad 2 haben. Können Sie auch einen ungerichteten Graphen mit 7 Knoten angeben, von denen genau einer Grad 3 und alle anderen Grad 2 haben? Falls ja, zeichnen Sie ihn, falls nein, begründen Sie warum Sie einen solchen Graphen nicht zeichnen können.

Aufgabe 11.2 *Eigenschaften von Graphen.*

a) Geben Sie an, wie viele Kanten ein gerichteter und ein ungerichteter Graph mit n Knoten maximal haben können, und begründen Sie Ihre Antwort.

b) Ein Baum ist ein ungerichteter Graph, der kreisfrei und zusammenhängend ist. Zeigen Sie durch vollständige Induktion über die Anzahl der Knoten n, dass jeder Baum genau $n-1$ viele Kanten hat.

c) Beweisen oder widerlegen Sie: Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und $n-1$ Kanten ist ein Baum.

Aufgabe 11.3 *Zyklenfreiheit testen.*

a) Wie lässt sich aus der Adjazenzmatrix ablesen, ob der entsprechende Graph einen Zyklus der Länge 1 hat?

b) Geben Sie einen Algorithmus an, der als Eingabe die Adjazenzmatrix eines gerichteten Graphs von G erhält und entscheidet, ob G zyklenfrei ist. Geben Sie auch die Laufzeit Ihres Verfahrens an.

c) Angenommen, der Algorithmus aus b) hat festgestellt, dass G nicht zyklenfrei ist, und Sie haben zusätzlich die Adjazenzmatrix von G gegeben. Wie kann man einen Zyklus selbst rekonstruieren? Falls es mehrere gibt, reicht es aus, *irgendeinen* Zyklus auszugeben. Geben Sie auch die Laufzeit Ihres Verfahrens an.