Eidgenössische
Technische Hochschule
Zürich

Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo
Federal Institute of Technology at Zurich

Departement Informatik
Markus Püschel
Peter Widmayer
Thomas Tschager
Tobias Pröger

8. Dezember 2016

Algorithmen & Datenstrukturen — Blatt 12 — HS 16

Abgabe: Am Donnerstag, den 15.12.2016, vor Beginn der Vorlesung um 10 Uhr im Eingangsbereich vor ML D28. Bitte heften Sie Ihre Blätter zusammen und benutzen Sie dieses Blatt als Deckblatt. Füllen Sie auch die ersten zwei der untenstehenden Felder aus.

Übungsstunde (Raum & Zeit): ____________________

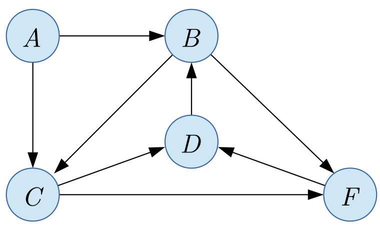
Abgegeben von: ____________________

Korrigiert von: ____________________

erreichte Punkte: ____

Aufgabe 12.1 *Topologisches Sortieren und Zusammenhangskomponenten.*

a) Gegeben sei der folgende Graph $G = (V, E)$. Geben Sie eine Menge $E' \subset E$ kleinstmöglicher Kardinalität an, sodass $G' = (V, E \setminus E')$ topologisch sortiert werden kann. Begründen Sie Ihre Wahl.



b) Geben Sie eine topologische Sortierung für den Graphen G' aus a) an.

c) Konstruieren Sie für jedes $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ einen Graphen mit n Knoten, der topologisch sortierbar ist und eine maximale Anzahl von Kanten hat. Stellen Sie dann für ein allgemeines n eine Vermutung auf, wie viele Kanten ein Graph mit n Knoten höchstens haben darf, damit er topologisch sortierbar ist, und beweisen Sie Ihre Vermutung.

d) Wie viele Kanten hat ein ungerichteter Graph mit n Knoten und $k \in \{1, \dots, n\}$ Zusammenhangskomponenten mindestens? Beschreiben Sie, wie Zusammenhangskomponenten mit einer minimalen Kantenanzahl aussehen, und begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 12.2 *Tiefen- und Breitensuche.*

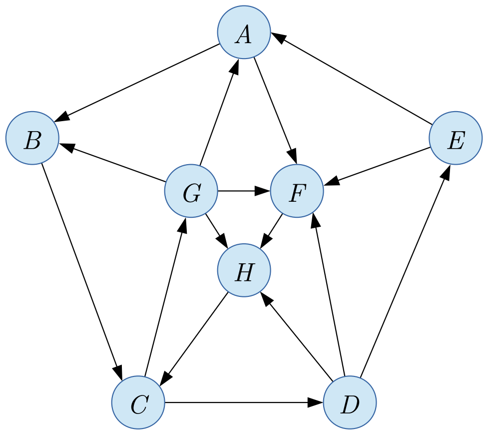
Jede Tiefen- und Breitensuche hat einen gewissen Freiheitsgrad, nämlich die Reihenfolge, in der die Nachbarknoten eines Knotens betrachtet werden. Für den untenstehenden Graphen nehmen wir an, dass eine Tiefen- bzw. Breitensuche die Nachbarknoten in alphabetisch aufsteigender Reihenfolge betrachtet. Die Reihenfolge, in der eine Tiefen- bzw. Breitensuche die Knoten des Graphs besucht, bezeichnen wir als *Tiefen-* bzw. *Breitenordnung*.

a) Geben Sie die Tiefen- und die Breitenordnung des nebenstehenden Graphen, startend vom Knoten A, an.

b) Gibt es einen Startknoten in diesem Graphen, von dem aus die Tiefenordnung der Breitenordnung entspricht und umgekehrt? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Geben Sie einen *ungerichteten*, zusammenhängenden Graphen mit n Knoten an, für den jede Breitenordnung von einem beliebigen Knoten aus auch eine Tiefenordnung von diesem Knoten aus ist und umgekehrt.

d) Welche asymptotische Laufzeit hätten die Tiefen- und Breitensuche, wenn man sie auf einer Adjazenzmatrix statt auf einer Adjazenzliste laufen liesse? Begründen Sie Ihre Antwort.



Aufgabe 12.3 *Schwarze Löcher.*

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Ein *schwarzes Loch* ist ein Knoten $v \in V$ mit Eingangsgrad $|V| - 1$ und Ausgangsgrad 0. Beschreiben Sie einen Algorithmus, der als Eingabe die Adjazenzmatrix des Graphen $G = (V, E)$ erhält und nur $\mathcal{O}(|V|)$ viele Einträge der Matrix betrachtet, um zu testen, ob G ein schwarzes Loch enthält oder nicht.

Hinweis: Natürlich kann ein schwarzes Loch in Zeit $\Theta(|V|^2)$ gefunden werden, indem jeder Eintrag der Adjazenzmatrix betrachtet wird. Gesucht wird hier aber eine effizientere Lösung.