Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo
Federal Institute of Technology at Zurich

Departement Informatik
Markus Püschel
Peter Widmayer
Thomas Tschager
Tobias Pröger

6. Oktober 2016

Datenstrukturen & Algorithmen — Lösungen zu Blatt 2 — FS 16

Lösung 2.1 *Induktionsbeweise.*

a) *Induktionsanfang* ($n = 1$): Es gilt $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4} = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$.

Induktionshypothese: Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Induktionsschritt ($n \to n+1$):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \Big(\sum_{k=1}^{n} k^3\Big) + (n+1)^3 \\
&\overset{I.H.}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{(n^2+4n+4)(n+1)^2}{4} = \frac{(n+2)^2(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

b) *Induktionsanfang* ($n = 1$): Es gilt $(x+y)^1 = x + y = x^0y^1 + x^1y^0 = \binom{1}{0}x^0y^1 + \binom{1}{1}x^1y^0 = \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}x^ky^{1-k}$.

Induktionshypothese: Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$.

Induktionsschritt ($n \to n+1$):

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&\overset{I.H.}{=} (x+y)\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}\Big) \\
&= \Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k}\Big) + \Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n+1-k}\Big) \\
&= \Big(\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^ky^{n+1-k}\Big) + \Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n+1-k}\Big) \\
&= \binom{n}{0}x^0y^{(n+1)-0} + \sum_{k=1}^{n}\Big(\binom{n}{k-1}x^ky^{n+1-k} + \binom{n}{k}x^ky^{n+1-k}\Big) \\
&\qquad + \binom{n}{n}x^{n+1}y^{(n+1)-(n+1)} \\
&= \binom{n+1}{0}x^0y^{(n+1)-0} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^ky^{(n+1)-k} + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1}y^{(n+1)-(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^ky^{(n+1)-k}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

c) *Induktionsanfang* ($n=1$): Es gilt $\sum_{k=0}^{1}\binom{r+k}{r} = \binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} = 1 + \frac{(r+1)!}{(r!)\cdot(1!)} = r+2 = \frac{(r+2)!}{((r+2-1)!)\cdot(1!)} = \binom{r+1+1}{1}$.

Induktionshypothese: Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei $\sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{r} = \binom{r+n+1}{n}$.

Induktionsschritt ($n \to n+1$):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}\binom{r+k}{r} &= \Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{r}\Big) + \binom{r+(n+1)}{r} \\
&\overset{I.H.}{=} \binom{r+n+1}{n} + \binom{r+n+1}{(r+n+1)-r} \\
&= \binom{r+n+1}{n} + \binom{r+n+1}{n+1} = \binom{r+(n+1)+1}{n+1}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

d) *Induktionsanfang* ($n=1$): Es gilt $(1+x)^1 = \binom{1}{0}x^0 + \binom{1}{1}x^1 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$.

Induktionshypothese: Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$.

Induktionsschritt ($n \to n+1$):

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\
&\overset{I.H.}{=} (1+x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \\
&= \Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\Big) + \Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}\Big) \\
&= \Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\Big) + \Big(\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^k\Big) \\
&= \binom{n}{0}x^0 + \sum_{k=1}^{n}\Big(\binom{n}{k}x^k + \binom{n}{k-1}x^k\Big) + \binom{n}{n}x^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0}x^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^k + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lösung 2.2 *Abschätzung durch Integration.*

Es gilt $\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n}\ln(k) = \sum_{k=2}^{n}\ln(k)$ (die letzte Gleichung gilt, da $\ln(1) = 0$ ist), also schätzen wir wie in der Vorlesung gezeigt die Summe durch

$$\int_1^n \ln(x)\ \mathrm{dx} \le \sum_{k=2}^{n}\ln(k) \le \int_1^n \ln(x+1)\ \mathrm{dx}$$

nach unten und nach oben ab. Die Integrale berechnen wir mit partieller Integration und erhalten

$$\int_1^n \ln(x)\ \mathrm{dx} = \int_1^n 1\cdot\ln(x)\ \mathrm{dx} = \Big[x\ln x\Big]_1^n - \int_1^n x\cdot\frac{1}{x}\ \mathrm{dx} = n\ln n - 0 - n + 1$$

und analog

$$\begin{aligned}
\int_1^n \ln(x+1)\ \mathrm{dx} = \int_1^n 1\cdot\ln(x+1)\ \mathrm{dx} &= \Big[(x+1)\ln(x+1)\Big]_1^n - \int_1^n (x+1)\cdot\frac{1}{x+1}\ \mathrm{dx} \\
&= (n+1)\ln(n+1) - 2\ln(2) - n + 1.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} n\ln n - n + 1 \leq \ln(n!) &\leq (n+1)\ln(n+1) - 2\ln(2) - n + 1 \\ &= n\ln(n+1) + \ln(n+1) - 2\ln(2) - n + 1 \\ &\leq n\ln(n) + 1 + \ln(n+1) - 2\ln(2) - n + 1 = n\ln(n) - n + \mathcal{O}(\ln n), \end{aligned}$$

also folgt $\ln(n!) = n\ln n - n + \mathcal{O}(\ln n)$. ▮

Lösung 2.3 *Rekursionen auflösen.*

a) *Induktionsanfang* ($k = 0$): Es gilt $S(0) = f(0) = a^0 f(0-0) = \sum_{i=0}^{0} a^i f(0-i)$.

Induktionshypothese: Für ein $k \in \mathbb{N}$ sei $S(k) = \sum_{i=0}^{k} a^i f(k-i)$.

Induktionsschritt ($k \to k+1$):

$$\begin{aligned} S(k+1) &= a \cdot S(k) + f(k+1) \\ &\overset{I.H.}{=} a\Big(\sum_{i=0}^{k} a^i f(k-i)\Big) + f(k+1) \\ &= \Big(\sum_{i=0}^{k} a^{i+1} f(k-i)\Big) + a^0 f(k+1) \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{k+1} a^i f(k-i+1)\Big) + a^0 f((k+1)-0) = \sum_{i=0}^{k+1} a^i f((k+1)-i). \end{aligned}$$ ▮

b) Sei $n = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Wir setzen $f(k) = 2^k$, $a = 2$ und

$$T'(k) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 0 \text{ ist} \\ 2T'(k-1) + 2^k & \text{falls } k \geq 1 \text{ ist,} \end{cases}$$

was exakt der in Aufgabenteil a) diskutierten Form entspricht. Ihre Auflösung ist

$$\begin{aligned} T'(k) &= \sum_{i=0}^{k} 2^i f(k-i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} 2^i \cdot 2^{k-i} = 2^k + k \cdot 2^k = (k+1) \cdot 2^k. \end{aligned}$$

Wir beobachten, dass $T'(k) = T(n)$ gilt, also erhalten wir mit der obigen Formel die Auflösung $T(n) = (\log_2(n) + 1) \cdot n \in \Theta(n \log n)$.

Lösung 2.4 *Algorithmenentwurf.*

a) Wir werfen das erste Ei aus dem 50. Stock. Wenn es zerbricht, wissen wir, dass das gesuchte Stockwerk eines der ersten 50 Stockwerke ist. Andernfalls wissen wir, dass das gesuchte Stockwerk zwischen dem 51. und dem 100. Stockwerk liegt. Wir müssen also in beiden Fällen nur noch 50 Stockwerke betrachten. Danach verfahren wir analog, indem wir ein (ggf. weiteres) Ei aus dem 25. oder dem 75. Stock werfen, usw. Etwas formaler geschrieben sähe unsere Strategie also wie folgt aus:

1) Setze $U \leftarrow 1$ und $O \leftarrow 100$. Diese Variablen geben an, welches Stockwerk wir mindestens (U) bzw. höchstens (O) suchen.
2) Solange $O > U$ ist:
3) Berechne $S \leftarrow \lfloor (U + O)/2 \rfloor$.
4) Wirf das Ei aus Stockwerk S.
5) Falls das Ei zerbricht, dann ist das gesuchte Stockwerk irgendwo zwischen U und S. Setze also $O \leftarrow S$.
6) Falls das Ei nicht zerbricht, dann ist das gesuchte Stockwerk irgendwo zwischen $S + 1$ und O. Setze also $U \leftarrow S + 1$.
7) Da nun die untere Schranke U und die obere Schranke O zusammenfallen, ist das gesuchte Stockwerk $U = O$.

Man sieht sofort, dass die Strategie bei einem n-stöckigen Haus mit $\Theta(\log(n))$ vielen Versuchen das gesuchte Stockwerk findet. Für $n = 100$ kann man zeigen, dass die Strategie niemals mehr als sieben Würfe benötigt (und immer mindestens sechs).

b) Hätten wir nur ein Ei zur Verfügung, dann bliebe uns gar nichts anderes übrig, als für jedes Stockwerk sukzessive zu probieren, ob dies das gesuchte Stockwerk ist. Mit einem zweiten Ei könnten wir aber den Suchbereich bereits im Vorfeld einschränken. Dazu gehen wir wie folgt vor: Wir werfen ein Ei aus (einem noch zu bestimmenden) Stockwerk s. Wenn es zerbricht, dann befindet sich das gesuchte Stockwerk irgendwo zwischen Stockwerk 1 und s, und wir benutzen das weitere Ei um dieses wie soeben beschrieben zu finden. Zerbricht das erste Ei dagegen nicht, dann fahren wir mit dem Stockwerk $s + (s - 1)$ fort. Zerbricht es dann, dann ist das gesuchte Stockwerk zwischen $s + 1$ und $s + (s - 1)$, und wir können das weitere Ei benutzen, um das Stockwerk in diesem Bereich zu finden. Zerbricht das erste Ei erneut nicht, dann fahren wir mit Stockwerk $s + (s - 1) + (s - 2)$ fort, usw. Wie sollte nun s gewählt werden? Da das Hochhaus 100 Stockwerke hat, muss also

$$100 \leq s + (s - 1) + (s - 2) + \cdots + 2 + 1 = \sum_{k=1}^{s} k = \frac{s(s + 1)}{2}$$

gelten. Die kleinste natürliche Zahl s, die diese Ungleichung erfüllt, ist $s = 14$. Wir werfen also das erste Ei aus dem 14ten Stock, dann aus dem 27ten, dann aus dem 39ten, usw., bis es zerbricht. Wir können nun folgendes beobachten: Ist das erste Ei nach i Würfen kaputt, dann genügen $s - i$ weitere Versuche, um das gesuchte Stockwerk zu finden. Insgesamt reichen also immer s Versuche, um das geeignete Stockwerk mit zwei Eiern zu finden, d.h., 14 Versuche bei einem 100-stöckigen Hochhaus.