Eidgenössische
Technische Hochschule
Zürich

Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo
Federal Institute of Technology at Zurich

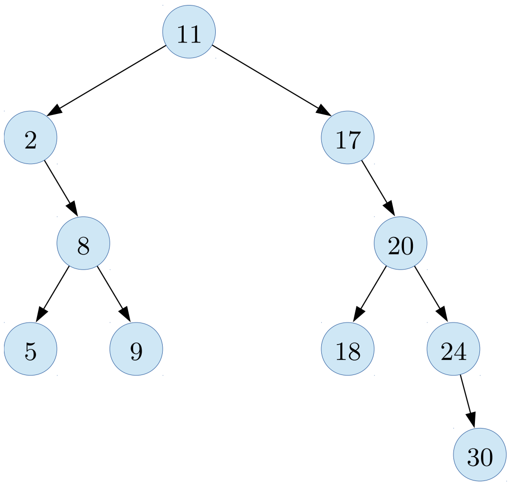
Departement Informatik
Markus Püschel
Peter Widmayer
Thomas Tschager
Tobias Pröger

1. Dezember 2016

Algorithmen & Datenstrukturen Lösungen zu Blatt 10 HS 16

Lösung 10.1 *Suchbäume.*

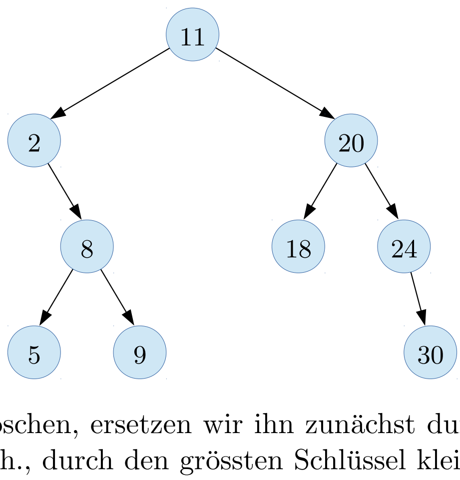
a) Es ergibt sich der folgende Baum:



Der Übersicht halber sind die Blätter (also die Nullnachfolger) nicht eingezeichnet.

b)
- Preorder: 11, 2, 8, 5, 9, 17, 20, 18, 24, 30,
- Postorder: 5, 9, 8, 2, 18, 30, 24, 20, 17, 11,
- Inorder: 2, 5, 8, 9, 11, 17, 18, 20, 24, 30.

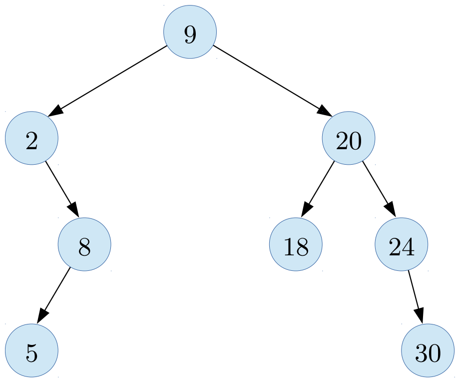
c) Wird der Schlüssel 17 gelöscht, dann wird einfach der Knoten mit dem Schlüssel 20 der Nachfolger der Wurzel:



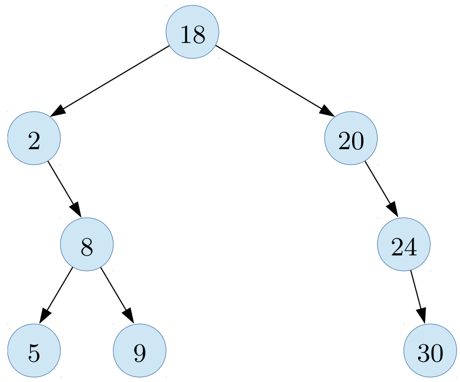
Um den Schlüssel 11 zu löschen, ersetzen wir ihn zunächst durch den Schlüssel des *symmetrischen Vorgängers* (d.h., durch den grössten Schlüssel kleiner als 11) oder durch den

Schlüssel des *symmetrischen Nachfolgers* (d.h., durch den kleinsten Schlüssel grösser als 11) und löschen den entsprechenden Vorgänger- oder Nachfolgerknoten.

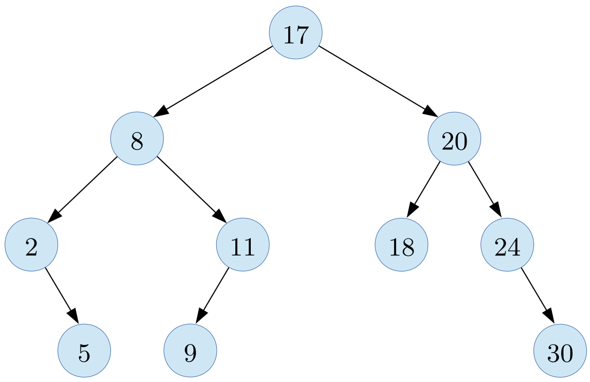
Bei Verwendung des symmetrischen Vorgängers:



Bei Verwendung des symmetrischen Nachfolgers:



d) Hier ergibt sich der folgende Baum:



Lösung 10.2 *Fragen zu Suchbäumen.*

a) Der Knoten w ist im Teilbaum von v, falls folgende Eigenschaften gelten: v hat eine kleinere Preorder-Nummer und eine grössere Postorder-Nummer als w. Betrachten wir zuerst die Preorder-Nummerierung: Ein Knoten a wird vor all seinen Nachfolgern nummeriert und hat daher eine kleinere Preorder-Nummer. Eine kleinere Preorder-Nummer allein reicht allerdings nicht aus, um sicher zu sein dass ein Knoten im Teilbaum von a ist, da möglicherweise auch Knoten anderer Teilbäume später als die Knoten im Teilbaum von a nummeriert werden. Analog gilt aber auch, dass die Postorder-Nummer von a grösser ist als die Postorder-Nummer jedes Knotens des Teilbaumes von a. Das gilt wiederum auch für Knoten aus anderen Teilbäumen, die vor a besucht wurden. Beide Eigenschaften zusammen (v hat eine kleinere Preorder-Nummer und eine grössere Postorder-Nummer als w) gelten allerdings nur für Knoten im Teilbaum von a.

b) Nur eine Einfügung der Schlüssel 8, 10 oder 11 führen zu einer Doppelrotation.

Lösung 10.3 *Anzahl verschiedener Suchbäume.*

Sei $\mathcal{K}_n = \{1, \ldots, n\}$ die Menge der zu verwaltenden Schlüssel und $T(n)$ die Anzahl verschiedener Suchbäume für die Schlüsselmenge $\mathcal{K}_n$. Für $n = 0$ ist $\mathcal{K}_0 = \emptyset$ und $T(0) = 1$, denn zu $\mathcal{K}_0$ gehört genau der leere Baum. Für $n = 1$ ist $\mathcal{K}_1 = \{1\}$, und der einzig mögliche Suchbaum speichert lediglich den Schlüssel 1. Folglich ist $T(1) = 1$.

Für allgemeines n gehen wir wie folgt vor. Ist an der Wurzel eines Suchbaums der Schlüssel k gespeichert, dann muss der linke Suchbaum die Schlüssel $\{1, \ldots, k-1\}$ verwalten. Analog muss der rechte Suchbaum die Schlüssel $\{k+1, \ldots, n\}$ verwalten. Es gibt $T(k-1)$ mögliche Teilbäume links und $T(n-k)$ mögliche Teilbäume rechts, und da jeder mögliche Teilbaum links mit jedem möglichen Teilbaum rechts kombiniert werden kann, müssen die Anzahlen multipliziert werden. Folglich existieren $T(k-1) \cdot T(n-k)$ mögliche Suchbäume zur Schlüsselmenge $\mathcal{K}_n$, wenn k an der Wurzel steht. Nun müssen wir lediglich über alle Möglichkeiten von k summieren und erhalten

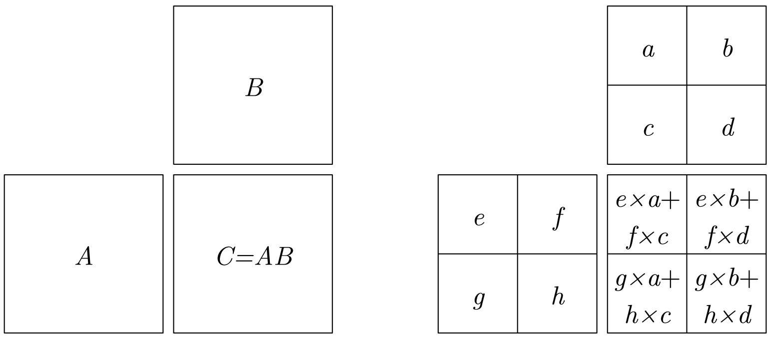
$$T(n) = \sum_{k=1}^{n} T(k-1)T(n-k). \tag{1}$$

Anmerkung: Diese Zahlen sind unter dem Namen *Catalan-Zahlen* (nach dem belgischen Mathematiker Eugène Charles Catalan) bekannt. Es gilt die Beziehung (ohne Beweis)

$$T(n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \tag{2}$$

Lösung 10.4 *Matrixmultiplikation.*

a) Sind zwei Matrizen A und B als Eingabe gegeben und soll $C = A \times B$ berechnet werden, dann ergibt sich die folgende Situation:



Wir berechnen jetzt rekursiv die Teilprodukte $P_1 = (f-h) \times (c+d)$, $P_2 = (e-g) \times (a+b)$, $P_3 = (e+h) \times (a+d)$, $P_4 = (e+f) \times d$, $P_5 = (g+h) \times a$, $P_6 = e \times (b-d)$, sowie $P_7 = h \times (c-a)$. Jetzt ergeben sich

- $P_1 + P_3 - P_4 + P_7 = (f-h) \times (c+d) + (e+h) \times (a+d) - (e+f) \times d + h \times (c-a) = f{\times}c{+}f{\times}d{-}h{\times}c{-}h{\times}d{+}e{\times}a{+}e{\times}d{+}h{\times}a{+}h{\times}d{-}e{\times}d{-}f{\times}d{+}h{\times}c{-}h{\times}a = e{\times}a{+}f{\times}c$,
- $P_4 + P_6 = (e+f) \times d + e \times (b-d) = e \times d + f \times d + e \times b - e \times d = e \times b + f \times d$,
- $P_5 + P_7 = (g+h) \times a + h \times (c-a) = g \times a + h \times a + h \times c - h \times a = g \times a + h \times c$,
- $P_3 - P_2 + P_6 - P_5 = (e+h) \times (a+d) - (e-g) \times (a+b) + e \times (b-d) - (g+h) \times a = e{\times}a{+}e{\times}d{+}h{\times}a{+}h{\times}d{-}e{\times}a{-}e{\times}b{+}g{\times}a{+}g{\times}b{+}e{\times}b{-}e{\times}d{-}g{\times}a{-}h{\times}a = g{\times}b{+}h{\times}d$.

b) Bei der Multiplikation zweier $(1{\times}1)$-Matrizen fällt genau eine elementare Multiplikation an, also ist $A(1) = 1$. Werden nun zwei $(n \times n)$-Matrizen multipliziert, dann müssen zunächst 14 Teilmatrizen der Grösse $(n/2 \times n/2)$ extrahiert werden, nämlich die Faktoren für die rekursiven Multiplikationen (also $(f-h), (c+d), (e-g), (a+b), \ldots, e, (b-d), h, (c-a)$). Dann werden sieben rekursive Multiplikationen zweier $(n/2 \times n/2)$-Matrizen berechnet, und die Produktmatrix C wird durch insgesamt 8 Additionen bzw. Subtraktionen einiger dieser Teilprodukte wieder zusammengesetzt. Pro Rekursionsschritt fallen also $\Theta(n^2)$ viele elementare Additionen und Subtraktionen an, wenn der Aufwand der rekursiven Aufrufe nicht berücksichtigt wird und n die Anzahl der Zeilen bzw. Spalten der entsprechenden Matrizen angibt. Als Rekursionsgleichung erhalten wir nun

$$A(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1 \text{ ist,} \\ 7A(n/2) + \xi n^2 & \text{falls } n > 1 \text{ ist.} \end{cases} \tag{3}$$

Hier steht ξ für eine geeignet gewählte Konstante. Sollen nur Additionen und Subtraktionen berücksichtigt werden, kann $\xi = \frac{18}{4}$ gewählt werden; die Konstante muss entsprechend grösser gewählt werden, wenn weitere Operationen wie etwa die Allokation von Speicher zur Speicherung von Teilergebnissen oder ähnliches berücksichtigt werden sollen. Wir teleskopieren nun und erhalten für $n = 2^k$

$$\begin{aligned}
A(n) &= 7A(n/2) + \xi n^2 \\
&= 7\big(7A(n/2^2) + \xi(n/2)^2\big) + \xi n^2 \\
&= 7^2 A(n/2^2) + \xi\big(7^1(n/2)^2 + 7^0 n^2\big) \\
&= 7^2\big(7A(n/2^3) + \xi(n/2^2)^2\big) + \xi\big(7^1(n/2)^2 + 7^0 n^2\big) \\
&= 7^3 A(n/2^3) + \xi\big(7^2(n/2^2)^2 + 7^1(n/2)^2 + 7^0 n^2\big) \\
&= 7^3\big(7A(n/2^4) + \xi(n/2^3)^2\big) + \xi\big(7^2(n/2^2)^2 + 7^1(n/2)^2 + 7^0 n^2\big) \\
&= 7^4 A(n/2^4) + \xi\big(7^3(n/2^3)^2 + 7^2(n/2^2)^2 + 7^1(n/2)^2 + 7^0 n^2\big) \\
&= 7^4 A(n/2^4) + \xi n^2 \left(\frac{7^3}{(2^3)^2} + \frac{7^2}{(2^2)^2} + \frac{7^1}{(2^1)^2} + \frac{7^0}{(2^0)^2}\right) \\
&= 7^4 A(n/2^4) + \xi n^2 \left(\frac{7^3}{4^3} + \frac{7^2}{4^2} + \frac{7^1}{4^1} + \frac{7^0}{4^0}\right) = \cdots \\
&\overset{(!)}{=} 7^k A(n/2^k) + \xi n^2 \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{7}{4}\right)^i = 7^{\log_2 n} + \xi n^2 \cdot \frac{(7/4)^{\log_2 n} - 1}{7/4 - 1} \\
&= n^{\log_2 7} + \xi n^2 \cdot \frac{n^{\log_2 (7/4)} - 1}{3/4} = n^{\log_2 7} + \frac{4}{3}\xi n^2 \left(n^{\log_2 7 - \log_2 4} - 1\right) \\
&= n^{\log_2 7} + \frac{4}{3}\xi n^{\log_2 7} - \frac{4}{3}\xi n^2,
\end{aligned} \tag{4}$$

was wir mit vollständiger Induktion über n beweisen.

Induktionsverankerung ($n = 1$):

$$A(1) = 1 = 1 + \frac{4}{3}\xi - \frac{4}{3}\xi = 1^{\log_2 7} + \frac{4}{3} \cdot \xi \cdot 1^{\log_2 7} - \frac{4}{3} \cdot \xi \cdot 1^2 \tag{5}$$

Induktionshypothese: Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n) = n^{\log_2 7} + \frac{4}{3}\xi n^{\log_2 7} - \frac{4}{3}\xi n^2$.

Induktionsschritt ($n \to 2n$):

$$A(2n) = 7A(n) + \xi(2n)^2 \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(I.H.)}{=} 7\left(n^{\log_2 7} + \frac{4}{3}\xi n^{\log_2 7} - \frac{4}{3}\xi n^2\right) + 4\xi n^2 \\
&= 7n^{\log_2 7} + 7 \cdot \frac{4}{3}\xi n^{\log_2 7} - \frac{28}{3}\xi n^2 + \frac{12}{3}\xi n^2 \\
&= 2^{\log_2 7} n^{\log_2 7} + 2^{\log_2 7} \cdot \frac{4}{3}\xi n^{\log_2 7} - \frac{16}{3}\xi n^2 \\
&= (2n)^{\log_2 7} + \frac{4}{3}\xi(2n)^{\log_2 7} - \frac{4}{3}\xi(2n)^2.
\end{aligned} \tag{7}$$