

Departement Informatik
Markus Püschel
Peter Widmayer
Thomas Tschager
Tobias Pröger
Tomáš Gavenčiak

15. Dezember 2016

Algorithmen & Datenstrukturen Lösungen zu Blatt P12 HS 16

Lösung P12.1 *Längster Pfad in einem gerichteten, kreisfreien Graphen.*

Die Lösung wurde bereits grösstenteils in der Aufgabenstellung skizziert. Der erste Schritt bestand in der Berechnung einer topologischen Sortierung, z.B. mit dem folgenden Algorithmus:

Initial sind alle Knoten *ungeordnet*. Sei O die leere Ordnung. Für jeden Knoten v verwalten wir die Anzahl $d^-(v)$ der ungeordneten Vorgängerknoten. Wir verwalten ausserdem eine Liste L aller Knoten mit $d^-(v) = 0$.

In jedem Schritt nehmen wir einen beliebigen Knoten w aus L , entfernen ihn aus L , weisen ihm die nächste Position in der Ordnung O zu und verringern $d^-(v)$ für alle Nachfolgerknoten v von w um 1. Sobald $d^-(v)$ für einen Knoten v den Wert 0 erhält, wird v der Liste L hinzugefügt. Das Vorgehen wird wiederholt, bis alle Knoten in der Reihenfolge $O = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ angeordnet wurden.

Der nächste Schritt besteht in der Berechnung eines längsten Pfades. Eine entscheidende Beobachtung besteht darin, dass jeder gerichtete Pfad die obige Ordnung O respektiert, und wenn es eine Kante $w \rightarrow v$ gibt, dann kann jeder Pfad, der in w endet, durch diese Kante erweitert werden. Dies führt zu einem Pfad, der um 1 länger ist und in v endet. Daher können für jeden Knoten v direkt die Länge $l(v)$ eines längsten in v endenden Pfades berechnen, sofern wir diese Information bereits für alle Knoten w berechnet haben, von denen eine gerichtete Kante zu v verläuft. Dieses führt zu folgendem dynamischen Programm zur Berechnung von $l(v_1), l(v_2), \dots, l(v_n)$ in dieser Reihenfolge:

$$l(v_i) = \max_{v_j \text{ ist Vorgänger von } v_i} l(v_j) + 1,$$

bzw. $l(v_i) = 1$ falls v_i keine Vorgänger hat.

Lösungen Auf der Vorlesungswebseite finden Sie eine Lösung, welche weitere Kommentare zur Implementierung enthält.

Daten Die Tests `judge1` und `judge2` sind – ähnlich wie die Tests `test*` – zufällige gerichtete azyklische Graphen mit verschiedenen Dichten von Kanten. Die Längen der längsten Pfade sind im Bereich 6–50 (selbst für Graphen mit 2000 Knoten und 20 000 gerichteten Kanten). Es gibt auch einige kantenlose Graphen, lange einfache gerichtete Pfade, sowie Turniergraphen (in denen zwischen je zwei Knoten eine gerichtete Kante in genau eine der beiden Richtungen verläuft).