Eidgenössische
Technische Hochschule
Zürich

Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo
Federal Institute of Technology at Zurich

Departement Informatik
Markus Püschel David Steurer Peter Widmayer
Chih-Hung Liu

2. October 2017

Algorithmen & Datenstrukturen Blatt 2 HS 17

Übungsstunde (Raum & Zeit): ______________________

Abgegeben von: ______________________

Korrigiert von: ______________________

erreichte Punkte: ____

Aufgabe 2.1 *Asymptotisches Wachstum von Funktionen.*

a) Finden Sie jeweils die kleinste natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ eine der folgenden Ungleichung gilt.

(i) $100 \cdot \log n < 2n$ (ii) $1000 \cdot \sqrt{n} < 2^n$ (iii) $1000 \cdot n^2 < n!$

b) Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Wir sagen, dass g strikt schneller wächst als f, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

Geben Sie für die untenstehenden Funktionen eine Reihenfolge an, so dass gilt: Eine Funktion f steht links von einer Funktion g, wenn g strikt schneller wächst als f. Beweisen Sie Korrektheit, indem Sie in der sortierten Reihenfolge für alle direkt nebeneinander liegenden Funktionen obige Eigenschaft zeigen.

$$n, \quad n!, \quad \log n, \quad n^2, \quad 2^n, \quad \sqrt{n}$$

Hinweis 1: Die Regel von de L'Hôpital besagt, dass für zwei differenzierbare Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \to \infty$ und $g(x) \to \infty$ für $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert.

Hinweis 2: Für $n!$ kann die Regel von de L'Hôpital nicht angewendet werden.

Aufgabe 2.2 *Wasserbehälter.*

Gegeben sind drei Wasserbehälter A, B und C mit Fassvolumen 11, 8 respektive 5 Liter. Zu Beginn sind B und C voll, während A leer ist. Es ist möglich, Wasser von einem Behälter in einen anderen umzuleeren. Dabei wird immer entweder ersterer leer oder zweiterer voll. Es ist also nicht erlaubt irgendwo dazwischen aufzuhören.

Wir bechreiben nun die Füllstände der Wasserbehälter als Zustand. Zum Beispiel ist der Anfangszustand $(A = 0, B = 8, C = 5)$.

a) Wie viele Zustände sind theoretisch möglich? Hier geht es noch nicht ums Umleeren, sondern nur darum das Gesamtvolumen von 13 Litern auf die drei Behälter zu verteilen, so dass jeder Behälter ein ganzzahliges Vielfaches eines Liters enthält.

b) Wie viele Zustände können vom Anfangszustand erreicht werden durch einmal Umleeren? Wie viele Zustände können maximal aus einem beliebigen Zustand erreicht werden durch einmal Umleeren?

c) Nun möchten wir herausfinden, ob es möglich ist durch mehrmaliges Umleeren, dass am Ende der Wasserbehälter C exakt 2 Liter enthält.

   Modellieren Sie dies als Graph Problem:

   - Geben Sie eine präzise Definition des Graphen und formulieren Sie die genaue Frage, die beantwortet werden muss über diesen Graphen.

Aufgabe 2.3 *Beweis durch Induktion.*

Beweisen Sie folgende zwei Aussagen.

a) Für alle $n \geq 1$ gilt,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

b) In jedem Graphen gibt es eine gerade Anzahl Knoten mit ungeradem Grad.

   Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis folgende Rechenregeln für Parität verwenden: Die Summe zweier ganzen Zahlen a, b ist genau dann ungerade, wenn genau eine der Zahlen ungerade ist; Das Produkt ist genau dann ungerade, wenn beide Zahlen ungerade sind.

Abgabe: Am Montag, den 9. Oktober 2017 zu Beginn Ihrer Übungsgruppe.