

Algorithmen & Datenstrukturen

Blatt 3

HS 17

Übungsstunde (Raum & Zeit): _____

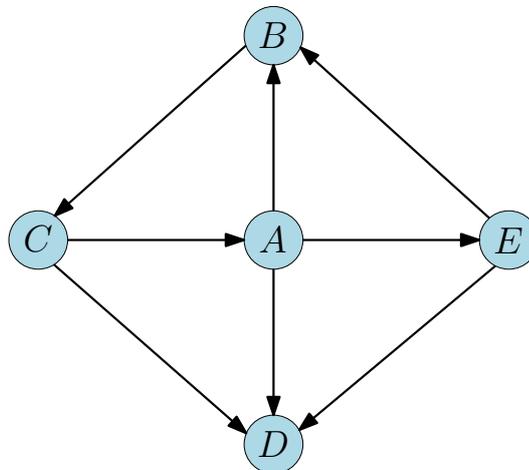
Abgegeben von: _____

Korrigiert von: _____

erreichte Punkte: _____

Aufgabe 3.1 *Topologische Sortierung.*

- a) Gegeben sei der folgende Graph $G = (V, E)$. Geben Sie eine Menge $E' \subset E$ kleinstmöglicher Kardinalität an, sodass $G' = (V, E \setminus E')$ topologisch sortiert werden kann, und geben Sie eine topologische Sortierung für G' an.



- b) Sei G ein topologisch sortierbarer Graph. Wie viele Kanten hat G mindestens und wie viele Kanten hat er höchstens? Begründen Sie Ihre Vermutungen und berechnen Sie, wie viele verschiedene topologische Sortierungen es in den beiden Fällen gibt.
- c) Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ und einer **eindeutigen** topologischen Sortierung $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$. Berechnen Sie die Anzahl Möglichkeiten für E , die zu genau dieser Sortierung führen.

Aufgabe 3.2 *Baumstruktur.*

Beweisen Sie folgende Aussagen durch Induktion:

- a) Ein Baum mit $n \geq 1$ Knoten hat $n - 1$ Kanten.
- b) Ein Baum mit $n \geq 2$ Knoten hat mindestens 2 Blätter.

Wir betrachten nun einen Baum T mit $n \geq 4$ Knoten, deren Grad entweder 1 oder 3 ist. Beweisen Sie folgende zwei Aussagen:

- c) Es gibt mindestens einen Knoten in T , der zwei oder drei Blätter als Nachbarn besitzt.
- d) Wenn T genau m Knoten mit Grad 3 hat, dann hat er $m + 2$ Blätter.

Aufgabe 3.3 *Schwarze Löcher.*

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Ein *schwarzes Loch* ist ein Knoten $v \in V$ mit Eingangsgrad $|V| - 1$ und Ausgangsgrad 0. Beschreiben Sie einen Algorithmus, der als Eingabe die Adjazenzmatrix des Graphen $G = (V, E)$ erhält und nur $\mathcal{O}(|V|)$ viele Einträge der Matrix betrachtet, um zu testen, ob G ein schwarzes Loch enthält oder nicht. *Hinweis:* Natürlich kann ein schwarzes Loch in Zeit $\mathcal{O}(|V|^2)$ gefunden werden, indem jeder Eintrag der Adjazenzmatrix betrachtet wird. Gesucht wird hier aber eine effizientere Lösung.

Abgabe: Am Montag, den 16. Oktober 2017 zu Beginn Ihrer Übungsgruppe.