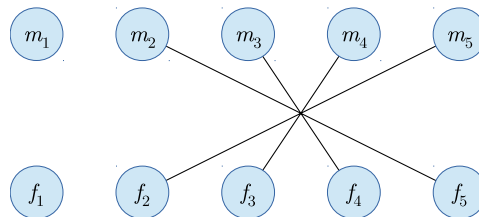


Algorithmen & Datenstrukturen**Blatt 0****HS 17****Lösung 0.1** *Algorithmus von Gale und Shapley ausführen.***a) Runde 1:**

- m_1 macht f_3 einen Heiratsantrag,
- m_2 macht f_5 einen Heiratsantrag,
- m_3 macht f_4 einen Heiratsantrag,
- m_4 macht f_3 einen Heiratsantrag, und
- m_5 macht f_2 einen Heiratsantrag.

Da f_3 lieber mit m_4 als mit m_1 verheiratet ist, verloben sich m_4 und f_3 . Weiterhin verloben sich m_2 und f_5 , m_3 und f_4 sowie m_5 und f_2 . Nicht verlobt sind m_1 sowie f_1 .

**Runde 2:**

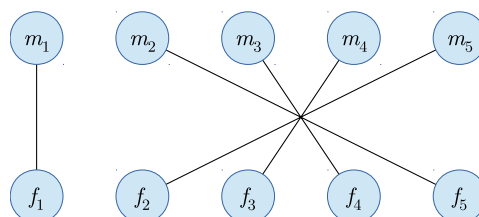
- m_1 macht f_4 einen Heiratsantrag.

f_4 ist derzeit mit m_3 verlobt und findet m_1 weniger attraktiv, folglich ändert sich an den Verlobungen nichts.

Runde 3:

- m_1 macht f_1 einen Heiratsantrag.

Da beide Partner bislang nicht verlobt sind, verloben sich m_1 und f_1 .

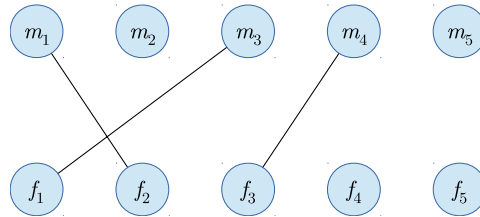


Hochzeiten: Am Ende heiraten jeweils m_1 und f_1 , m_2 und f_5 , m_3 und f_4 , m_4 und f_3 sowie m_5 und f_2 .

b) Runde 1:

- f_1 macht m_3 einen Heiratsantrag,
- f_2 macht m_1 einen Heiratsantrag,
- f_3 macht m_4 einen Heiratsantrag,
- f_4 macht m_4 einen Heiratsantrag, und
- f_5 macht m_4 einen Heiratsantrag.

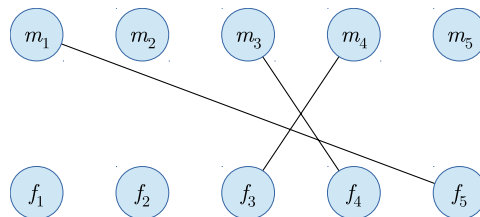
Da m_4 von allen Frauen f_3 am attraktivsten findet, verloben sich f_3 und m_4 . Weiterhin verloben sich f_1 und m_3 sowie f_2 und m_1 . Nicht verlobt sind f_4 , f_5 , m_2 sowie m_5 .



Runde 2:

- f_4 macht m_3 einen Heiratsantrag, und
- f_5 macht m_1 einen Heiratsantrag.

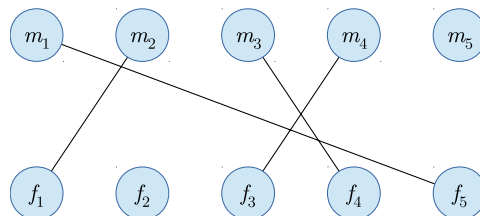
Da m_3 lieber mit f_4 als mit f_1 verheiratet ist, löst m_3 die Verlobung mit f_1 auf und verlobt sich neu mit f_4 . Ausserdem ist m_1 lieber mit f_5 als mit f_2 verheiratet, also löst m_1 die Verlobung mit f_2 auf und verlobt sich neu mit f_5 . Die übrige Verlobung zwischen f_3 und m_4 bleibt bestehen. Nicht (mehr) verlobt sind f_1 , f_2 , m_2 sowie m_5 .



Runde 3:

- f_1 macht m_2 einen Heiratsantrag, und
- f_2 macht m_3 einen Heiratsantrag.

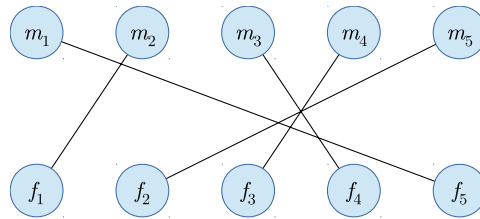
Da f_1 und m_2 derzeit nicht verlobt sind, verloben sie sich. m_3 dagegen bevorzugt f_4 vor allen anderen Frauen, also bleibt diese Verlobung bestehen. Nicht verlobt sind f_2 und m_5 .



Runde 4:

- f_2 macht m_5 einen Heiratsantrag.

Da beide derzeit nicht verlobt sind, verloben sie sich.



Hochzeiten: Am Ende heiraten jeweils f_1 und m_2 , f_2 und m_5 , f_3 und m_4 , f_4 und m_3 sowie f_5 und m_1 .

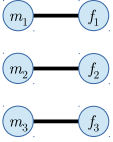
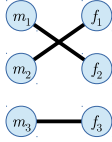
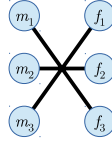
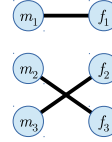
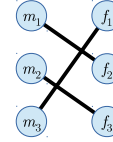
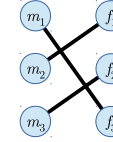
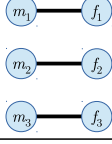
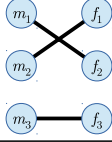
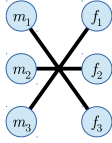
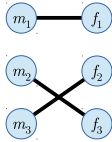
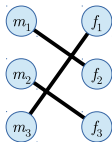
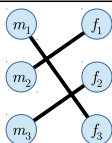
- c) In dem konkreten Beispiel heiraten f_2 , f_3 und f_4 die gleichen Partner, egal ob die Männer oder die Frauen die Heiratsanträge machen. Unterschiedliche Partner bekommen nur f_1 und f_5 . Wenn die Männer die Heiratsanträge machen, heiratet f_1 Mann m_1 (ihre vierte Präferenz), und f_5 heiratet m_2 (ebenfalls ihre vierte Präferenz). Machen stattdessen die Frauen die Heiratsanträge, dann heiratet f_1 Mann m_2 (ihre zweite Präferenz), und f_5 heiratet m_1 (ebenfalls ihre zweite Präferenz). Für die Frauen ist es daher also besser, wenn sie statt der Männer die Heiratsanträge machen.

Lösung 0.2 Lokale Suche.

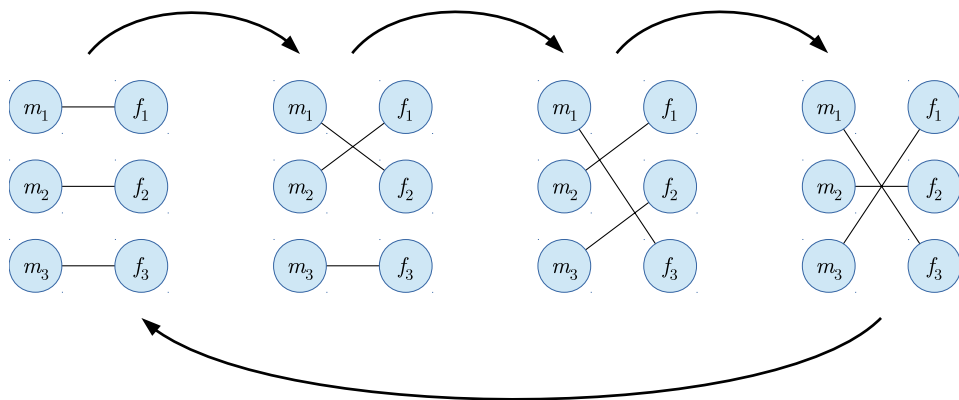
- a) Sei m ein Mann, der mit Frau f' verlobt ist, und sei weiterhin f eine Frau, die mit Mann m' verlobt ist. Wenn nun sowohl m als auch f ihre jeweiligen Verlobungen lösen und sich stattdessen untereinander verloben, dann ist weder f' die höchste Präferenz für m , noch ist m' die höchste Präferenz für f . Wenn also umgekehrt f' die höchste Präferenz von m oder m' die höchste Präferenz für f ist (oder sogar beides erfüllt ist), dann werden sich m und f niemals freiwillig dazu entschliessen, sich zu verloben. Eine Verlobung zwischen m und f könnte nur dadurch entstehen, dass sich m' und f' untereinander verloben.

Seien nun die Männer $\mathcal{M} = \{m_1, m_2\}$ und die Frauen $\mathcal{F} = \{f_1, f_2\}$ gegeben. Angenommen, es gibt einen Mann m_i und eine Frau f_j , die in der initialen Zuordnung nicht verlobt sind, und die nun ihre aktuellen Verlobungen mit f' und m' lösen und sich untereinander verloben. Da f' und m' nur die zweiten Präferenzen von m_i bzw. f_j waren, sind also f_j und m_i die höchsten Präferenzen. Sind aber m_i und f_j erst einmal miteinander verlobt, dann wollen weder m_i noch f_j die Verlobung lösen, da beide bereits mit dem am höchsten präferierten Partner verlobt sind. Damit ist der Algorithmus fertig. Wenn es kein solches Paar (m_i, f_j) wie oben beschrieben gibt, dann ist der Algorithmus ebenfalls fertig.

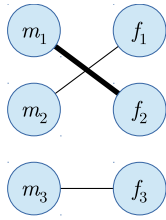
- b) Es ergibt sich die folgende Tabelle:

						
	0	1	1	1	2	2
	1	0	2	2	1	1
	1	2	0	2	1	1
	1	2	2	0	1	1
	2	1	1	1	0	2
	2	1	1	1	2	0

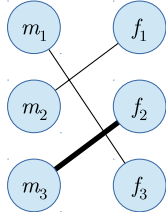
c) Ein möglicher Ablauf des Algorithmus ist der Folgende:



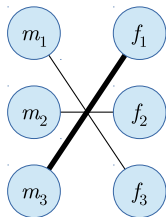
O.B.d.A. sei die initiale Zuordnung die in der obigen Abbildung am weitesten links stehende Zuordnung, in der m_i und f_i (für $i = 1, 2, 3$) verlobt sind. Wir überlegen jetzt, wie aus diesem Ablauf mögliche Präferenzlisten der Männer und der Frauen abgeleitet werden können.



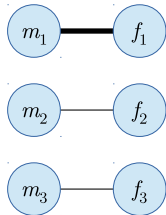
Angenommen, m_1 und f_2 haben ihre jeweiligen Verlobungen gelöst und sich untereinander verlobt. Für m_1 hat dann f_2 eine höhere Präferenz als f_1 . Analog hat für f_2 m_1 eine höhere Präferenz als m_2 .



Als nächstes nehmen wir an, dass f_2 und m_3 ihre jeweiligen Verlobungen gelöst und sich untereinander verlobt haben. Für f_2 hat dann m_3 eine höhere Präferenz als m_1 , und für m_3 hat f_2 eine höhere Präferenz als f_3 .



Nun haben sich m_3 und f_1 miteinander verlobt. Für m_3 hat dann f_1 eine höhere Präferenz als f_2 , und für f_1 hat m_3 eine höhere Präferenz als m_2 .



Als letztes nehmen wir an, dass sich f_1 und m_1 miteinander verlobt haben. Für f_1 hat dann m_1 eine höhere Präferenz als m_3 , und für m_1 hat f_1 eine höhere Präferenz als f_3 .

Aus den Überlegungen ergeben sich die folgenden Präferenzen (ein Stern bedeutet, dass die Reihenfolge der Präferenzen beliebig gewählt werden darf):

m_1	f_2	f_1	f_3
m_2	*	*	*
m_3	f_1	f_2	f_3

f_1	m_1	m_3	m_2
f_2	m_3	m_1	m_2
f_3	*	*	*

Man kann nun leicht nachprüfen, dass alle oben genannten Anforderungen an die Präferenzen erfüllt sind.