Eidgenössische
Technische Hochschule
Zürich

Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo
Federal Institute of Technology at Zurich

Departement Informatik
Markus Püschel David Steurer Peter Widmayer
Chih-Hung Liu

9. Oktober 2017

Algorithmen & Datenstrukturen Blatt 2 HS 17

Lösung 2.1 *Asymptotisches Wachstum von Funktionen.*

a)

(i) $n_0 = 101$

n	$100 \cdot \log n$	$2n$
100	200	200
101	200.432	202

(ii) $n_0 = 12$

n	$1000 \cdot \sqrt{n}$	2^n
11	3316.625	2048
12	3464.102	4096

(iii) $n_0 = 9$

n	$1000 \cdot n^2$	$n!$
8	64000	40320
9	81000	362880

b) Die korrekte Reihenfolge der Funktionen ist

$$\log n, \quad \sqrt{n}, \quad n, \quad n^2, \quad 2^n, \quad n!.$$

- $\sqrt{n}$ wächst strikt schneller als $\log n$: (Regel von de L'Hôpital anwenden)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\ln 10 \sqrt{n}} = 0.$$

- n wächst strikt schneller als $\sqrt{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

- n^2 wächst strikt schneller als n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

- 2^n wächst strikt schneller als n^2: (Regel von de L'Hôpital zweimal hintereinander anwenden)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot n}{\ln 2 \cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(\ln 2)^2 \cdot 2^n} = 0.$$

- $n!$ wächst strikt schneller als 2^n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\dots\cdot\frac{2}{n-1}\cdot\frac{2}{n}$$

  Die zweite Hälfte aller Faktoren sind alle höchstens $\frac{2}{\frac{n}{2}}=\frac{4}{n}$. Die ersten vier Faktoren zusammen sind genau $\frac{2}{3}<1$, alle übrigen Faktoren sind höchstens 1. Also gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}\le\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n}\right)^{n/2}=0.$$

Lösung 2.2 *Wasserbehälter.*

a) Es gibt 51 mögliche Zustände $(A=a,B=b,C=c)$, so dass $a+b+c=13$ und kein Container überläuft, also $0\le a\le 11$, $0\le b\le 8$ und $0\le c\le 5$. Wir zählen auf und unterscheiden dabei alle verschiedenen Füllstände für C:

- Falls $C=0$, dann muss B mindestens 2 Liter enthalten, da A maximal 11 Liter fasst. Also gibt es 7 verschiedene Zustände: $B\in\{2,3,4,5,6,7,8\}$ und $A=13-B$.
- Falls $C=1$, dann muss B mindestens 1 Liter enthalten. Also gibt es 8 verschiedene Zustände: $B\in\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ und $A=13-1-B$.
- Falls $C\in\{2,3,4,5\}$, gibt es für jedes C genau 9 verschiedene Zustände: $B\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ und $A=13-C-B$.

Insgesamt gibt es also $7+8+4*9=51$ mögliche Zustände.

b) Aus dem Anfangszustand können genau zwei andere Zustände erreicht werden durch einmal umleeren: $(A=8,B=0,C=5)$ und $(A=5,B=8,C=0)$.

Aus einem beliebigen Zustand können jedoch mit einmal umleeren bis zu 6 andere Zustände erreicht werden, da jeder Container in einen der zwei anderen Container geleert werden kann.

Aus $(A=5,B=5,C=3)$ erreicht man zum Beispiel $(A=2,B=8,C=3)$, $(A=3,B=5,C=5)$, $(A=10,B=0,C=3)$, $(A=5,B=3,C=5)$, $(A=8,B=5,C=0)$ und $(A=5,B=8,C=0)$.

c) Wir definieren den Graph $G(V,E)$ wie folgt: V besteht aus 51 Knoten, wobei jeder Knoten einem der 51 Zustände entspricht. E besteht aus gerichteten Kanten: Eine gerichtete Kante $(v,u)\in E$, mit $v,u\in V$, existiert genau dann, wenn aus Zustand v mit einmal Umleeren Zustand u erreicht werden kann.

Sei nun $v=(A=0,B=8,C=5)$ der Anfangszustand und sei $U\subset V$ die Menge aller Knoten, die einem Zustand entsprechen mit $C=2$. Die Frage an den Graph lautet nun:

- Gibt es einen Pfad von v zu einem Knoten $u\in U$?

Lösung 2.3 *Beweis durch Induktion.*

a) *Induktionsanfang* ($n=1$): Es ist $\sum_{i=1}^{1} i^2=1=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}=\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6}$, also ist die Behauptung für $n=1$ wahr.

Induktionshypothese: Angenommen, es gelte $\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$ für ein $n\in\mathbb{N}$.

Induktionsschritt ($n \to n+1$):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \Big(\sum_{i=1}^{n} i^2\Big) + (n+1)^2 \\
&\overset{I.H.}{=} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + \frac{6 \cdot (n+1)^2}{6} \\
&= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + \frac{n \cdot (n+1) \cdot 2}{6} + \frac{2 \cdot (n+1) \cdot (2n+3)}{6} \\
&= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+3)}{6} + \frac{2(n+1)(2n+3)}{6} \\
&= \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot (2n+3)}{6} = \frac{(n+1) \cdot ((n+1)+1) \cdot (2(n+1)+1)}{6}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

b) *Induktionsanfang* ($n = 1$): In einem Graphen mit $n = 1$ Knoten hat dieser Knoten per Definition Grad 0, und es gibt keine (d.h., 0, also gerade viele) Knoten mit ungeradem Grad. Folglich ist die Behauptung für $n = 1$ wahr.

Induktionshypothese: Angenommen, in jedem Graphen mit n Knoten gibt es gerade viele Knoten mit ungeradem Grad.

Induktionsschritt ($n \to n+1$): Betrachte einen beliebigen Graphen $G = (V, E)$ mit $n+1$ Knoten und einen beliebigen Knoten $v \in V$. Seien A und B die Mengen der Knoten in G, die zu v adjazent sind und die in G einen ungeraden bzw. geraden Grad haben. Nach Entfernung der Kanten zwischen v und den Knoten aus A bzw. B erhalten wir einen Graphen G' mit n Knoten, in dem es gemäss Induktionshypothese gerade viele Knoten mit ungeradem Grad gibt. Wir argumentieren nun, dass dann auch in G gerade viele Knoten einen ungeradem Grad haben.

Die Summe von $|A|$ und $|B|$ ergibt den Grad von v. In G gibt es $|A|$ zusätzliche Knoten mit ungeradem Grad (die in G' geraden Grad hatten), $|B|$ Knoten mit geradem Grad (die in G' ungeraden Grad hatten). Die Anzahl der Knoten aus G' mit ungeradem Grad hat sich also in G um $|A| - |B|$ verändert. Ausserdem wurde ja v hinzugefügt. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: Der Grad von v ist gerade. Dann ist $|A| + |B|$ gerade, also sind sowohl $|A|$ als auch $|B|$ entweder beide gerade oder beide ungerade. Damit ist auch $|A| - |B|$ gerade. Es gibt also auch in G gerade viele Knoten mit ungeradem Grad.

2. Fall: Der Grad von v ist ungerade. Dann ist $|A| + |B|$ ungerade, und entweder $|A|$ oder $|B|$ sind ungerade. Damit ist $|A| - |B|$ ungerade. Zusätzlich müssen wir aber noch v mit ungeradem Grad berücksichtigen. Also hat erneut G gerade viele Knoten mit ungeradem Grad. $\blacksquare$

Die Aussage lässt sich auch direkt, ohne Induktion, beweisen. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Summe aller Knotengrade gerade ist. Die Summe der Grade aller Knoten mit geradem Grad ist gerade. Also muss auch die Summe der Grade aller Knoten mit ungeradem Grad gerade sein (sonst wäre die Gesamtsumme ungerade). Folglich muss es gerade viele Knoten mit ungeradem Grad geben, sonst wäre die Summe ihrer Knotengrade ungerade. $\blacksquare$